INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · E. METTLER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXIII. BAND DRITTES HEFT 1955

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DM 11,60

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber
Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101
oder an die Herren
Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Rittnerstr. 12
Professor **K. v. Sanden**, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. **F. Schleicher**, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN
einsenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 24 40

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Inhalt:

Seite

Craemer, H., Idealplastische isotrope und orthotrope Platten bei Vollausnutzung aller Elemente. Mit 4 Textabbildungen 151

Tremmel, E., Beitrag zum Problem der Wärmespannungen in Scheiben. Mit 3 Textabbildungen 159

Pestel, E., Eine neue hydrodynamische Analogie zur Torsion prismatischer Stäbe. Mit 10 Textabbildungen 172

Nickel, K., Über Tragflügelsysteme in ebener Strömung bei beliebigen instationären Bewegungen. Mit 4 Textabbildungen 179

Weidenhammer, F., Drehschwingungen in Kreuzgelenkwellen. Mit 3 Textabbildungen 189

Wuest, W., Asymptotische Absaugegrenzschichten an längsangeströmten zylindrischen Körpern. Mit 5 Textabbildungen 198

Helmbold, H. B., Über den Auftrieb eines Blasflügels. Mit 2 Textabbildungen 209

Wundt, H., Wachstum der laminaren Grenzschicht an schräg angeströmten Zylindern bei Anfahrt aus der Ruhe. Mit 8 Textabbildungen 212

INGENIEUR-ARCHIV

XXIII. BAND DRITTES HEFT 1955

Idealplastische isotrope und orthotrope Platten bei Vollausnutzung aller Elemente.

Von H. Craemer.

1. Problemstellung. In der Plastostatik der Stabwerke, insbesondere der durchlaufenden Balken ist es sehr einfach, die Bemessung so vorzunehmen, daß für einen bestimmten Belastungsfall alle Querschnitte auf Biegung voll ausgenutzt sind. Man kann z. B. von einem Balken mit überall gleichem plastischem Widerstandsmoment ausgehen und für diesen die Fließgelenke bestimmen; damit ist dann der Momentenverlauf im ganzen Tragwerk aus Gleichgewichtsbetrachtungen allein bestimmbar, d. h. statisch bestimmt. Zwischen den Fließgelenken sind dabei die Querschnitte nicht plastiziert, und es steht nichts im Wege, die Widerstandsmomente so lange zu verringern, bis alle Schnitte voll ausgenutzt sind, also der kontinuierliche Spannungsausgleich[1] vorliegt. Daß diese Vollausnutzung unter der Höchstlast tatsächlich eintritt, folgt aus den Extremalsätzen von *Prager* und *Greenberg*[2]; dies gilt auch für die in den späteren Abschnitten gebrachten Lösungen für Platten.

Bei einer Platte überall gleicher Stärke treten an die Stelle der Fließgelenke die Bruchlinien[3]; beim gleichmäßig belasteten Quadrat z. B. sind dies im allgemeinen die Diagonalen. Der Spannungszustand in den dazwischen liegenden Bruchstücken, die nicht plastiziert sind, ist aber, im Gegensatz zum Stabwerk, nicht statisch bestimmt. Um den Momentenverlauf in ihnen zu bestimmen, müßte also die Elastostatik herangezogen werden, was wegen ihrer unregelmäßigen Gestalt meist auf praktisch unlösbare Probleme führt.

Die Aufgabe liegt also insoweit anders als bei Stabwerken. Sie ist besonders für den Stahlbeton von Wichtigkeit und besteht darin, die Platte bei gegebener Belastung und Stützung so zu bemessen, daß sie in ihren sämtlichen Elementen voll ausgenutzt ist. Ihre Auflager setzen wir dabei so bemessen voraus, daß sie die an sie abgegebenen Belastungen und Momonte aufnehmen können, ohne ihrerseits plastische Formänderungen zu erleiden.

2. Gleichgewichtsbedingungen. Die Gleichgewichtsbedingungen eines beliebig gerichteten Elements dx, dy in kartesischen Koordinaten (x, y), (Abb. 1a) sind bekanntlich

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}, \quad q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \tag{2.1}$$

und

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -p; \tag{2.2}$$

also

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p. \tag{2.3}$$

Hierbei sind q und m die Querkräfte und Momente je Längeneinheit und p die Flächenbelastung.

Bei Polarkoordinaten und polarer Symmetrie (Abb. 1b) gilt statt (2.3)

$$r\,q = -m_\varphi + \frac{d}{dr}(r\,m_r). \tag{2.4}$$

3. Fließzustand isotroper Platten. Für jedes Plattenelement gibt es bekanntlich[4] zwei aufeinander senkrechte Richtungen 1 und 2, die Hauptrichtungen, in denen die Biegemomente m_1

[1] *H. Craemer*, Ing.-Arch. 21 (1953), S. 187.
[2] *H. J. Greenberg* u. *W. Prager*, Proc. Am. Soc. Civ. Egrs., Sept. 59, 1952.
[3] *K. W. Johansen*, Brudlinieteorier, Kopenhagen 1943.
[4] *A. Nadai*, Elastische Platten, Berlin 1925.

und m_2, die Hauptmomente, algebraische Größt- und Kleinstwerte sind und die Schubmomente verschwinden; m sei der absolut größte der beiden Werte.

Als Fließbedingung übernehmen wir die bei Stabwerken gebräuchliche; bei voller Plastizierung wird also

$$m = \sigma_s \frac{h^2}{4}, \tag{3.1}$$

wobei h die Plattendicke und σ_s die Fließspannung des Baustoffs ist. Die Dehnungen und infolgedessen die Krümmung in Richtung dieses Hauptmoments werden hierbei theoretisch unendlich groß.

Für gerissenen Stahlbeton gilt statt dessen angenähert

$$m = \sigma_s f_e \left(h - \frac{\sigma_s f_e}{2\,\sigma_p}\right), \tag{3.2}$$

wenn f_e die Bewehrung je Längeneinheit, σ_s ihre Fließspannung und σ_p der die Fließspannung des Betons vertretende Wert ist. Hierbei wurde angenommen, daß die Bewehrung den Schnitt senkrecht kreuzt, doch ist eine Erweiterung für beliebige Richtungen möglich [1]. Entsprechend unserer Aufgabe sind h, f_e und m im allgemeinen ortsveränderlich.

a) Gleichsinnige Vollausnutzung. Als solche bezeichnen wir nun einen Zustand, bei dem in allen Elementen in beiden Richtungen die Hauptmomente gleich den Fließmomenten werden:

$$m_1 = m_2 = m. \tag{3.1.1}$$

Der Momentenkreis wird dann zum Punkt, sodaß keine ausgezeichneten Hauptrichtungen bestehen und für ein beliebig gerichtetes kartesisches System

$$m_x = m_y = m, \quad m_{xy} = 0 \tag{3.1.2}$$

wird. Damit gehen (2.1) und (2.3) über in

$$q_x = \frac{\partial m}{\partial x}, \quad q_y = \frac{\partial m}{\partial y}, \tag{3.1.3}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) m = -p. \tag{3.1.4}$$

Man sieht, daß diese Gleichung formal mit derjenigen für die Ausbiegung einer gespannten Haut unter Querbelastung übereinstimmt; bei unregelmäßigen Umrissen der Platte kann also die Lösung experimentell auf Grund des Membrangleichnisses gefunden werden.

Bei polarer Symmetrie wird

$$m_r = m_\varphi = m, \tag{3.1.5}$$

also zufolge (2.4)

$$q = \frac{dm}{dr}. \tag{3.1.6}$$

Statt der Bruchlinien tritt bei Vollausnutzung ein differentiales Bruchnetz auf; die Krümmung der Biegefläche hat im vorliegenden Falle in allen Richtungen gleiches Vorzeichen.

b) Ungleichsinnige Vollausnutzung. Vollausnutzung kann nun auch bestehen, wenn $m_1 = -m_2 = m$ ist; der Momentenkreis hat dann den Halbmesser m und das Maximum $\pm m$ ist nur in den Hauptrichtungen erreicht. Die Trajektorien dieser Hauptrichtungen können dabei, je nach dem vorliegenden Fall, noch verschiedenen Verlauf haben; wir beschränken uns auf drei wichtige Sonderfälle.

Ist die Trajektorienschar kartesisch, d. h. besteht sie aus zwei Geradenscharen und sind diese den Richtungen x, y parallel, so wird

$$m_x = -m_y = m, \quad m_{xy} = 0 \tag{3.2.1}$$

und wegen (2.1) und (2.3)

$$q_x = \frac{\partial m}{\partial x}, \quad q = -\frac{\partial m}{\partial y} \tag{3.2.2}$$

[1] S. Fußnote 3 von Seite 151.

und

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) m = -p\,. \tag{3.2.3}$$

Kennt man eine Lösung von (3.1.4), so gewinnt man eine Lösung von (3.2.3) durch Übergang von y auf $y/\sqrt{-1}$.

Kreuzt eine kartesische Trajektorienschar die Richtungen x, y unter 45°, so ist

$$m_x = m_y = 0\,, \quad m_{xy} = m\,, \tag{3.2.4}$$

also

$$q_x = \frac{\partial m}{\partial y}\,, \quad q_y = \frac{\partial m}{\partial x} \tag{3.2.5}$$

und

$$\frac{\partial^2 m}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{2}\,p\,. \tag{3.2.6}$$

Besteht also, dritter Sonderfall, polare Symmetrie, so ist

$$m_r = -m_\varphi = m\,, \tag{3.2.7}$$

also

$$r\,q = m + \frac{d}{dr}(r\,m)\,. \tag{3.2.8}$$

Die Krümmungen der Biegefläche haben hier in den beiden Hauptrichtungen entgegengesetztes Vorzeichen.

c) Superpositionsprinzip. Die Überlagerung von Lösungen zwei verschiedener Lastfälle ist in der Plastostatik stets dann und nur dann streng zulässig [1], wenn zu beiden das gleiche Bruchbild gehört. Hier trifft dies dann zu, wenn die ganze Platte entweder gleichsinnig oder ungleichsinnig ausgenutzt ist oder wenn die Grenze zwischen den diesbezüglichen Gebieten für beide Lastfälle die gleiche ist.

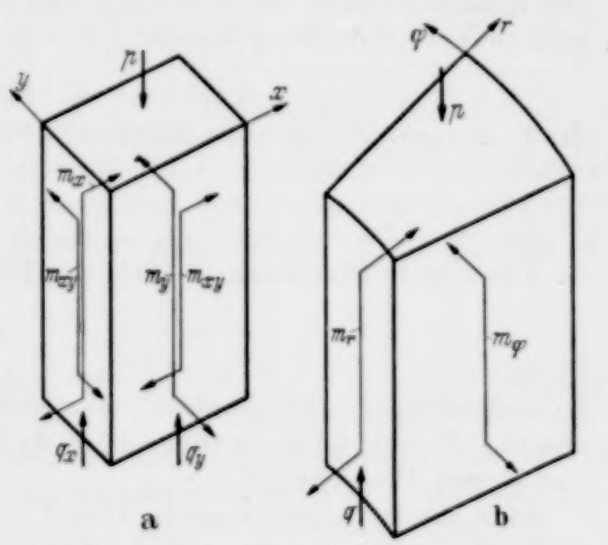

Abb. 1. Plattenelemente mit Spannungsresultanten, a mit kartesischen Koordinaten, b bei polarer Symmetrie.

d) Vergleich mit dem elastischen Zustand. Wird ein Stabwerk so bemessen, daß unter der Höchstlast alle Querschnitte mit dem vollen Fließmoment ausgenutzt sind, so tritt durch die Plastizierung keine Neuverteilung der Momente, sondern nur ein Spannungsausgleich innerhalb der einzelnen Querschnitte [2] ein; wenn dies auch für Platten zutrifft, so müßte auch im elastischen Zustand die Randspannung σ_r aller Elemente in Richtung x, y absolut gleich sein und (3.1.4) und (3.2.3) müßten auf geometrisch verträgliche elastische Formänderungen führen. Sind σ_x, σ_y, τ die Spannungen des Plattenelementes Abb. 1a in beliebigem Abstand z von seiner Mittelebene und ν die Querdehnungszahl, so müßte also [3]

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\,\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\,\sigma_x) = 2\,(1+\nu)\,\frac{\partial^2 \tau}{\partial x\,\partial y}$$

sein, wobei, je nachdem gleichsinniger oder ungleichsinniger Ausgleich vorliegt,

$$\sigma_x = \pm\,\sigma_y = \frac{2\,z}{h}\,\sigma_r\,, \quad \tau = 0$$

[1] *H. Craemer*, Abh. Int. Ver. Brücken u. Hochb. 12 (1952), S. 79.
[2] S. Fußnote 1 von Seite 151.
[3] *S. Timoshenko*, Theory of Elasticity, S. 24, New York 1951.

wäre. Dies in die vorige Gleichung eingesetzt, liefert aber

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \pm \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{1}{h}\right) = 0\,,$$

eine Bedingung, die nur in Ausnahmefällen mit (3.1.4) oder (3.2.3) zugleich bestehen kann. Im Gegensatz zum Stabwerk wird daher im allgemeinen nicht nur eine Spannungsumlagerung innerhalb der Querschnitte, sondern auch eine solche der Momente eintreten.

4. Isotrope Platte, Anwendungen. a) K r e i s - u n d R i n g p l a t t e n. Wir stellen einige Fälle polarer Symmetrie voran; da hier q aus dem Gleichgewicht sofort bestimmbar ist, sind die Lösungen besonders einfach. Eine Kreisplatte vom Halbmesser r_0 sei mit p = konst. belastet, so daß

$$q = -\frac{1}{2}\,p\,r \tag{4.1.1}$$

ist. Die Platte sei am Rande frei gestützt, demnach ist

$$m = 0 \quad \text{für} \quad r = r_0\,. \tag{4.1.2}$$

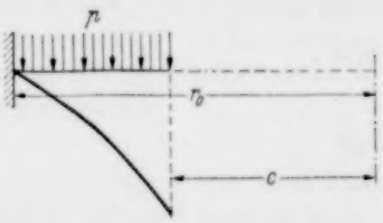

Abb. 2. Ringplatte am Außenrande eingespannt.

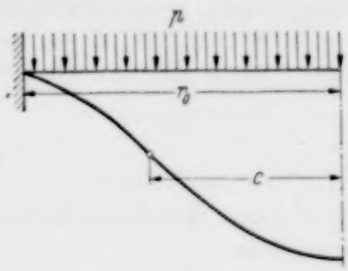

Abb. 3. Volle Kreisplatte am Außenrande eingespannt.

Die Senkungsfläche im Bruch hat Krümmungen überall gleichen Vorzeichens, so daß gleichsinnige Vollausnutzung besteht. Aus (3.1.6) folgt dann

$$m = -\,p\,r^2/4 + C;$$

die Konstante C bestimmt sich aus (4.1.2), und es wird

$$m = \frac{p}{4}\,(r_0^2 - r^2)\,. \tag{4.1.3}$$

Für eine in Plattenmitte wirkende Einzellast P erhält man auf ganz ähnliche Weise

$$m = \frac{P}{2\,\pi}\ln\frac{r_0}{r}\,. \tag{4.1.4}$$

Ist außerdem eine Flächenlast p vorhanden, so folgt aus Abschnitt **3** c), daß die rechten Seiten von (4.1.3) und (4.1.4) zu addieren sind; dasselbe erhält man, wenn man q in (3.1.6) als Funktion von p und P ausdrückt.

Eine Kreisringplatte nach Abb. 2 sei am äußeren Rande eingespannt und mit p gleichmäßig belastet. Da die radiale Krümmung negativ, die tangentiale positiv ist, kann nur ungleichsinnige Vollausnutzung eintreten. Es ist

$$r\,q = \frac{1}{2}\,p\,(c^2 - r^2)\,,$$

also nach (3.2.8)

$$m = \frac{C}{r^2} + \frac{p}{8}\,(2\,c^2 - r^2)\,.$$

Die Konstante C bestimmt sich daraus, daß am inneren Rande $m = 0$ sein muß, so daß

$$m = -\,\frac{p}{8}\left(r^2 - 2\,c^2 + \frac{c^4}{r^2}\right) \tag{4.1.5}$$

wird.

Es sei nun eine volle Kreisplatte am Rande eingespannt (Abb. 3). Aus dem Bruchbild folgt, daß für $0 \leqq r \leqq c$ die Ausnutzung gleichsinnig, für $c \leqq r \leqq r_0$ ungleichsinnig ist. Da für $r = c$

die radialen Momente m_r nicht gleichzeitig positiv und negativ sein können, muß

$$m = 0 \quad \text{für} \quad r = c \tag{4.1.6}$$

sein; (4.1.1) gilt für beide Bereiche.

Für den inneren Bezirk ist somit (4.1.3) anwendbar, wenn man c statt r_0 einführt:

$$m = \frac{p}{4}(c^2 - r^2), \quad 0 \leqq r \leqq c. \tag{4.1.7}$$

Für den äußeren Teil erhält man aus (4.1.1) und (3.2.8)

$$m = \frac{C}{r^2} - \frac{p r^2}{8}$$

oder unter Beachtung von (4.1.6)

$$m = -\frac{p}{8}\left(r^2 - \frac{c^4}{r^2}\right) \quad (c \leqq r \leqq r_0). \tag{4.1.8}$$

Hierbei ist die Größe c frei wählbar; diese Tatsache ist das Gegenstück zu der frei wählbaren Schlußlinie der durchlaufenden Balken.

b) Rechteckplatten. Eine rechteckige Platte nach Abb. 4 sei gleichmäßig mit p belastet und frei gestützt, so daß die Randbedingungen

$$m = 0 \quad \text{für} \quad x = \pm\frac{1}{2}a \quad \text{und} \quad m = 0 \quad \text{für} \quad y = \pm\frac{1}{2}b \tag{4.2.1}$$

bestehen. Die Ausnutzung ist offenbar gleichsinnig.

Für die Lösung empfiehlt sich die Einführung der in der Abbildung dargestellten Hilfsordinaten y_1 und y_2, damit man von dem raschen Abklingen der Exponentialfunktion Gebrauch machen kann; sie lautet dann

$$m = \frac{4\,p\,a^2}{\pi^3} \sum_{1,3,5} \cos\frac{n\pi x}{a} \frac{(-1)_n}{n^3}\left\{1 - \frac{\exp(-n\pi y_1/a + \exp(-n\pi y_2/a)}{1 + \exp(-n\pi b/a)}\right\}, \tag{4.2.2}$$

Abb. 4. Rechteckplatte.

wobei $(-1)_n$ anzeigt, daß die Reihe alterniert. Daß die hier maßgebende Gleichung (3.1.4) erfüllt ist, läßt sich nachweisen, wenn man dort p als *Fourier*reihe mit Periode $2a$ entwickelt und dann (4.2.2) anwendet. Ebenso lassen sich die Randbedingungen (4.2.1) leicht bestätigen, wenn man für x, y_1 und y_2 die entsprechenden Werte in (4.2.2) einsetzt. Es läßt sich ferner zeigen, daß für $a/b = 0$, wie zu erwarten, der Verlauf von m in x parabolisch wird.

Statt dessen kann man auch die Doppelreihe

$$m = \frac{16\,p\,a\,b}{\pi^4} \sum_{1,3,5} \sum_{1,3,5} \frac{(-1)i\,(-1)_k\,a\,b}{i\,k\,(b^2\,i^2 + a^2\,k^2)} \cos\frac{i\pi x}{a} \cos\frac{k\pi y}{b} \tag{4.2.3}$$

verwenden. Hier kann der Nachweis der Richtigkeit dadurch erbracht werden, daß man in (3.1.4) p durch eine Doppelreihe mit Perioden $2a$ und $2b$ ausdrückt und (4.2.3) einsetzt. Die Erfüllung von (4.2.1) ist sofort ersichtlich. Für $x = y = 0$ z. B. liefert die Auswertung

$$m = 0{,}076\,p\,a\,b. \tag{4.2.4}$$

Steht eine Einzellast P in der Mitte der Platte, so ist die Lösung bei $y = 0$ unstetig; sie kann für $y > 0$ geschrieben werden

$$m = \frac{P}{\pi} \sum_{1,3,5} \frac{1}{n} \cos\frac{n\pi x}{a} \cdot \frac{\exp(-n\pi y/a) - \exp(-n\pi b/2a) \cdot \exp(-n\pi y_1/a)}{1 + \exp(-n\pi b/a)}. \tag{4.2.5}$$

Sie befriedigt ersichtlich die Randbedingungen (4.2.1) an den Rändern $x = \pm a/2$ und $y_1 = 0$. Sie befriedigt ferner, wie es sein soll, die Gleichung (3.1.4) mit $p = 0$. Bildet man schließlich nach (3.1.3) die Querkraft q_y für einen Schnitt $y = 0$ dicht neben der Last, so muß diese Querkraft nach Größe und Verteilung mit der halben Belastung P übereinstimmen; daß dies tatsächlich der Fall ist, kann durch Darstellung von P als *Fourier*reihe nachgewiesen werden.

Wir behandeln weiter ein Beispiel für ungleichsinnige Vollausnutzung. Eine quadratische Platte mit Seitenlänge a und Koordinaten nach Abb. 4 sei in $x = \pm\frac{1}{2}a$ frei gestützt; die

Ränder $y = \pm \frac{1}{2} a$ seien völlig frei und je durch eine Linienlast $\bar{p} =$ konst. belastet. Offensichtlich ist die Hauptkrümmung in Richtung x positiv, in Richtung y negativ. Es gelten die Randbedingungen (4.2.1) und außerdem muß

$$q_y = \pm \bar{p} \quad \text{für} \quad y = \pm \frac{1}{2} a \tag{4.2.6}$$

sein. Die Lösung

$$m = -\frac{4 \bar{p} a}{\pi^2} \sum_{1,3,5} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n \pi x}{a} \cos \frac{n \pi y}{a} \tag{4.2.7}$$

genügt, wie leicht nachzuweisen, der hier maßgebenden Gleichung (3.2.3) mit $p = 0$, sowie den Bedingungen (4.2.1). Daß sie auch (4.2.6) befriedigt, folgt, wenn man q_y nach (3.1.3) bildet und $\bar{p}$ als Reihe darstellt.

Schließlich untersuchen wir noch eine Rechteckplatte $a \cdot b$ mit gleichmäßiger Last p, die an zwei aneinanderstoßenden Seiten eingespannt, an den beiden anderen völlig frei ist; den Ursprung des kartesischen Koordinatensystems wählen wir aber in der freien Ecke; es muß also

$$m = 0, \; q_x = 0 \quad \text{bzw.} \quad q_y = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{bzw.} \quad y = 0 \tag{4.2.8}$$

sein. Die Betrachtung der Bruchverformung zeigt, daß hier der Fall von (3.2.6) vorliegt. Die Lösung

$$m = -\frac{1}{2} p x y \tag{4.2.9}$$

genügt (3.2.6) und den Randbedingungen (4.2.8). Die Randträger werden nur durch Querkräfte

$$q_x = -\frac{1}{2} p a \quad \text{bzw.} \quad q_y = -\frac{1}{2} p b$$

und Schubmomente

$$m_{xy} = -\frac{1}{2} p a y \quad \text{bzw.} \quad m_{xy} = -\frac{1}{2} p b x$$

gemäß (3.2.5) und (3.2.4) beansprucht.

Auch bei den vorangegangenen Beispielen lassen sich die Auflagerdrücke aus den Querkräften für den betreffenden Rand ermitteln. Bei der nicht voll ausgenutzten Platte hingegen können sie, da die Bruchstücke elastisch bleiben, nur aus elastostatischen Betrachtungen gewonnen werden.

5. Fließzustand orthotroper Platten. Im Falle orthogonaler Anisotropie bestehen für jedes Element zwei aufeinander senkrechte Richtungen a und b, für die die Biegemomente m_a oder m_b, unter denen Plastizierung eintritt, absolute Größt- und Kleinstwerte sind; wir bezeichnen sie als Orthotropiehauptrichtungen und Hauptfließmomente. Die Größe von m_a und m_b ergibt sich wie in (3.1) und (3.2), jedoch mit verschiedenen Werten σ_s und f_e für die beiden Richtungen.

Die eben eingeführten Begriffe haben mit den in Abschnitt 2 definierten Hauptrichtungen 1 und 2 und Hauptmomenten m_1 und m_2 zunächst nichts zu tun, da diese von der Belastung des Tragwerks abhängen, jene aber reine Baustoffeigenschaften darstellen. Bei einer parallel zum Stamm geschnittenen Holzplatte z. B. verlaufen die Richtungen a und b parallel und senkrecht zu den Fasern, während sie bei orthogonal bewehrtem Stahlbeton mit den Bewehrungsrichtungen übereinstimmen. Zur Vereinfachung werden wir aber im folgenden voraussetzen, daß die Richtungen 1 und 2 mit jenen a und b zusammenfallen; Plastizierung tritt also ein, wenn

$$\text{entweder} \quad m_1 = m_a \quad \text{oder} \quad m_2 = m_b \tag{5.1}$$

ist.

Die Orthotropiehauptrichtungen sind nun im allgemeinen Falle nicht für jedes Element die gleichen, sondern bilden ein rechtwinkliges Netz von Orthotropietrajektorien, wie man z. B. am Faserverlauf in der Nähe eingewachsener Äste erkennt. Wir setzen hier entweder kartesische oder polare Orthotropie voraus, so daß die Trajektorien entweder zwei Geradenscharen oder eine Schar von Radien mit den zugehörigen Kreisen bilden.

a) Gleichsinnige Vollausnutzung. In Erweiterung von Abschnitt 3a) verstehen wir unter gleichsinniger Vollausnutzung, daß sämtliche Elemente mit

$$m_1 = m_a = m\,, \quad m_2 = m_b = \mu\, m \tag{5.1.1}$$

ausgenutzt sind; das „Orthotropieverhältnis" μ kann hierbei beliebige positive Werte annehmen und sei vorläufig als Konstante angenommen. Man sieht, daß, abweichend vom Bisherigen, hier kein Ausgleich der Spannungen im ganzen Tragwerk vorliegt, sondern nur ein solcher der Ausnutzungen.

Ist die Orthotropie kartesisch, so lassen wir die Koordinaten mit ihren Hauptrichtungen zusammenfallen, so daß

$$m_x = m\,, \quad m_y = \mu\, m\,, \quad m_{xy} = 0 \tag{5.1.2}$$

wird; (2.1) und (2.3) gehen dann über in

$$q_x = \frac{\partial m}{\partial x}\,, \quad q_y = \mu\, \frac{\partial m}{\partial y} \tag{5.1.3}$$

und

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu\, \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) m = -\,p \tag{5.1.4}$$

als Erweiterung von (3.1.3) und (3.1.4).

Das Membrangleichnis kann auch hier herangezogen werden, wenn man eine in den beiden Richtungen verschieden stark gespannte Haut verwendet. Lösungen von (3.1.4) führen auf Lösungen von (5.1.4), wenn man von y auf $y/\sqrt{\mu}$ übergeht [1].

Bei polarer Symmetrie wird

$$m_r = m\,, \quad m_\varphi = \mu\, m \tag{5.1.5}$$

und wegen (2.4)

$$r\,q = (1-\mu)\, m + r\, \frac{dm}{dr} \tag{5.1.6}$$

als Erweiterung von (3.1.6).

b) Ungleichsinnige Vollausnutzung. Man sieht, daß die Angaben des vorigen Abschnitts gültig bleiben, wenn man dort μ mit umgekehrtem Vorzeichen einsetzt.

6. Orthotrope Platten, Anwendungen. a) Kreisplatten. Es sei wieder die in Abschnitt 4 a) untersuchte frei gestützte Kreisplatte mit Belastung nach (4.1.1) betrachtet; die Ausnutzung ist gleichsinnig, und es wird

$$m = \frac{p\, r_0^2}{2\,(3-\mu)} \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu-1} - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]. \tag{6.1.1}$$

Die Richtigkeit läßt sich durch Einsetzen in (5.1.6) beweisen, die Erfüllung von (4.1.2) ist sofort ersichtlich. In der Plattenmitte, $r = 0$, erhält man $m = 0$ bzw. $m = \infty$, je nachdem $\mu \gtrless 1$ ist; für $\mu = 1$ führt die Lösung auf (4.1.3) zurück.

Wir behandeln weiter die an Hand von Abb. 3 untersuchte eingespannte Platte; für den inneren Teil $0 \leqq r \leqq c$ gilt (6.1.1) mit c an Stelle von r_0; außen ($c \leqq r \leqq r_0$) ist der Ausgleich ungleichsinnig, und es ist Absatz 5 b) zu beachten. Die Lösung lautet

$$m = \frac{p\, r^2}{2\,(3+\mu)} \left\{\left(\frac{c}{r}\right)^{3+\mu} - 1\right\}. \tag{6.1.2}$$

Setzt man dies und (4.1.1) in (5.1.6) mit umgekehrtem Vorzeichen von μ ein, so überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit; für $r = c$ wird $m = 0$, wie es (4.1.6) verlangt.

b) Rechteckplatten. Wir beschränken uns auf die Erweiterung von (4.2.2) und (4.2.3) auf orthotropen Baustoff. Es wird

$$m = \frac{4\, p\, a^2}{\pi^3} \sum_{1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)_n}{n^3} \cos\frac{n\,\pi\, x}{a} \left[\frac{1 - \exp\left(-\,n\,\pi\, y_1/a\,\sqrt{\mu}\right) + \exp\left(-\,n\,\pi\, y_2/a\,\sqrt{\mu}\right)}{1 + \exp\left(-\,n\,\pi\, b/a\,\sqrt{\mu}\right)}\right] \tag{6.2.1}$$

[1] Vgl. auch die Affinitätssätze in der Arbeit von *Johansen*, Fußnote 3 von S. 151.

oder

$$m = \frac{16\,p\,a\,b}{\pi^4} \sum_{1,3,5} \sum_{1,3,5} \frac{(-1)^i\,(-1)_k\,a\,b}{i\,k\,(b^2\,i^2 + \mu\,a^2\,k^2)} \cos\frac{i\,\pi\,x}{a} \cos\frac{k\,\pi\,y}{b}\,. \tag{6.2.2}$$

Durch Vergleich mit (4.2.1) und (5.1.4) überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit.

7. Wechselndes Orthotropieverhältnis. In Abschnitt 5 hatten wir vorausgesetzt, daß das Verhältnis μ eine Konstante sei. Im Stahlbeton nun entsteht die Orthotropie gemäß (3.2) bei im allgemeinen gleichbleibendem h durch verschiedene Dichte f_e der Bewehrungen in den beiden Richtungen; μ kann also an verschiedenen Stellen der Platte verschieden sein. Damit reduziert sich aber die Bemessungsaufgabe auf die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen (2.3) mit $m_{xy} = 0$, d. h. von

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -\,p \tag{7.1}$$

oder von (2.4).

In der Praxis teilt man eine gleichmäßige Belastung p meist in zwei unveränderliche Teilbeträge $p_x + p_y$ auf, so daß

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} = -\,p_x\,, \qquad \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -\,p_y\,, \tag{7.2}$$

also

$$m_x = \frac{p\,a^2}{8}\left(1 - \frac{4\,x^2}{a^2}\right), \quad m_y = \frac{p\,b^2}{8}\left(1 - \frac{4\,y^2}{b^2}\right) \tag{7.3}$$

wird. Das Verhältnis p_x/p_y wird dabei so gewählt, daß man dem elastischen Verhalten möglichst nahe kommt. Es läßt sich aber leicht zeigen, daß dies mit einem solchen konstanten Verhältnis nur unvollkommen erreicht werden kann, daß vielmehr z. B. an den Rändern $x = \pm\frac{1}{2}\,a$ der Anteil p_y verschwinden müßte. Dieses weithin geübte Verfahren, dessen Begründung immer mit Überlegungen nur aus der Elastostatik versucht wird, findet somit erst auf Grund der Plastostatik — und nur innerhalb ihrer Gültigkeitsgrenzen — seine volle Rechtfertigung.

8. Zusammenfassung. Aus der Bedingung, daß alle Elemente der Platte in zwei aufeinander senkrechten Richtungen mit dem vollplastischen Moment gleichen oder entgegengesetzten Vorzeichens beansprucht werden, werden die Differentialgleichungen für die Bemessung isotroper und orthotroper Platten in den wichtigsten Sonderfällen entwickelt. Die Anwendung wird an Beispielen erläutert. Ferner werden Angaben über die Bemessung von Stahlbetonplatten gemacht.

(Eingegangen am 19. April 1954.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *H. Craemer*, Lahore, Pakistan.
Moghalpura College of Engineering & Technology.

Beitrag zum Problem der Wärmespannungen in Scheiben.

Von E. Tremmel.

1. Einleitung. Unter dem Einfluß stationärer ebener Temperaturfelder $T(x, y)$ bleiben die Querschnitte zylinder- oder prismenförmiger Körper oder dünne Scheiben, da die Verträglichkeitsbedingungen hier erfüllt sind, spannungsfrei, wenn sie keine Kurven enthalten, die eine Wärmequelle umschließen[1]. Denn nur dann können die aus den Temperaturverzerrungen allein folgenden Verschiebungen eindeutige Ortsfunktionen sein. Ist das nicht der Fall, so werden die mehrdeutigen Formänderungsgrößen durch Überlagerung eines zusätzlichen, einem Selbstspannungszustand zugeordneten Verschiebungsfeldes getilgt. Zu seiner Festlegung ist daher eine den Randbedingungen angepaßte *Airy*sche Spannungsfunktion so aufzubauen, daß die aus ihr abgeleiteten Verschiebungsgrößen bestimmte, die mehrdeutigen Temperaturverschiebungen kompensierende Funktionen enthalten.

In der vorliegenden Arbeit soll das Problem zunächst allgemein behandelt werden; die Aufgabe, eine Spannungsfunktion aus den berechneten Temperaturverschiebungen zu bestimmen, führt hier auf eine *Poisson*sche Differentialgleichung, deren Partikulärintegral aus einem in komplexer Form ausgedrückten Ansatz berechnet wird. Da die Verträglichkeitsbedingungen im Falle eines stationären Wärmeflusses, wie schon erwähnt, von vorneherein erfüllt sind, bleibt die auf Temperaturwirkungen erweiterte Differentialgleichung der *Airy*schen Spannungsfunktion homogen. Die gesuchte, die Randbedingungen befriedigende endgültige Lösung wird daher durch Überlagerung jenes Partikulärintegrals mit anderen passend gewählten Integralen der Bipontentialgleichung als Linearkombination biharmonischer Funktionen erhalten. In einem Beispiel wird die praktische Durchführung der Berechnung an einem von exzentrisch liegenden Kreiszylindern begrenzten Rohr gezeigt werden.

2. Berechnung der Verschiebungsgrößen. Für einen prismatischen oder zylindrischen Körper, dessen Endflächen ($z = \pm a$) unverschieblich festgehalten seien, ist ein in der Längsrichtung z konstantes stationäres Temperaturfeld $T(x, y)$, das also der *Laplace*schen Differentialgleichung

$$\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

genügt, durch die Randbedingungen festgelegt. Wegen (1) kann unter Verwendung der *Cauchy-Riemann*schen Differentialgleichungen aus T die Funktion $S(x, y)$ so bestimmt werden, daß

$$Q = T + i\,S \tag{2}$$

eine analytische Funktion der komplexen Variablen $t = x + i\,y$ wird. Bedeuten ν die *Poisson*sche Zahl und α_T den Wärmeausdehnungskoeffizienten, dann sind die aus den Temperaturdehnungen allein folgenden Verschiebungen u, v in x- und y-Richtung in komplexer Darstellung durch

$$\omega(t) = u + i\,v = (1 + \nu)\,\alpha_T \int Q\,dt \tag{3}$$

gegeben. Denn unter der Voraussetzung spannungsfreier Querschnitte gilt für die Verzerrungskomponenten[1]

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = (1 + \nu)\,\alpha_T\,T\,, \qquad \varepsilon_{xy} = 0\,;$$

werden sie durch die Ableitungen der Verschiebungen ausgedrückt:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}\,, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

so ergeben sich die *Cauchy-Riemann*schen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\,,$$

---

[1] *E. Melan*, Temperaturverteilungen ohne Wärmespannungen, Österr. Ing.-Arch. 6 (1951), S. 1; *E. Melan*, Österr. Ing.-Arch. 4 (1950), S. 153; *E. Melan* u. *H. Parkus*, Wärmespannungen, S. 9 ff., Wien 1953.

d. h. auch u und v sind analytische Funktionen der komplexen Variablen t:

$$u + i\,v = \omega(t)\,.$$

Mit

$$\omega'(t) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

folgt

$$2\,\omega'(t) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

wobei der Realteil dieser Funktion durch

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2\,(1+\nu)\,\alpha_T T\,,$$

der Imaginärteil daher unter Verwendung der oben berechneten Funktion S durch

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\,(1+\nu)\,\alpha_T S$$

gegeben ist. Aus der Integration

$$\omega(t) = \int \omega'(t)\,dt = (1+\nu)\,\alpha_T \int (T + i\,S)\,dt$$

ergibt sich schließlich die oben angeschriebene Gleichung (3).

Der Körper wird bis auf die Spannungen in der z-Richtung, für die

$$\bar{\sigma}_z = -\,2\,G\,(1+\nu)\,\alpha_T T \tag{4}$$

gilt, spannungsfrei sein, wenn die Verschiebungen (2) eindeutig sind. Das ist nur dann der Fall, wenn

$$\oint Q\,dt = 0 \tag{5}$$

wird, wenn also, wie aus dem *Gauß*schen Integralsatz hervorgeht, in dem Querschnitt keine Kurven existieren, die eine Wärmequelle umschließen.

Wir teilen das gegebene Temperaturfeld in einem Teil $T_0(x, y)$, für den das Integral $\oint Q_0\,dt$ verschwindet, der also eindeutige Verschiebungen bewirkt, und in einem Teil $T_1(x, y)$, für den

$$\oint Q_1\,dt \neq 0$$

wird, so daß die von diesem Teil gelieferten Verschiebungen mehrdeutig werden. Es sei

$$T = T_0 + T_1\,; \tag{6}$$

die Verschiebungen zufolge dieses Temperaturfeldes sind nach (3) durch

$$u + i\,v = (1+\nu)\,\alpha_T \int (Q_0 + Q_1)\,dt \tag{7}$$

gegeben und setzen sich aus dem eindeutigen Anteil

$$u_0 + i\,v_0 = (1+\nu)\,\alpha_T \int Q_0\,dt \tag{8a}$$

und dem mehrdeutigen Anteil

$$u_1 + i\,v_1 = (1+\nu)\,\alpha_T \int Q_1\,dt \tag{8b}$$

zusammen. Die mehrdeutigen Verschiebungen werden nun durch Überlagerung eines zusätzlichen Verschiebungsfeldes getilgt, wobei der diesem Feld entsprechende Spannungszustand den Randbedingungen genügen muß.

3. Einführung der *Airy*schen Spannungsfunktion: Wir denken uns den Querschnitt so aufgeschlitzt, daß sämtliche, die Wärmequelle umschließenden Kurven durchtrennt sind und haben nun eine *Airy*sche Spannungsfunktion ψ zu bestimmen, welche die im geschlossenen Querschnitt mehrdeutigen Temperaturverschiebungen kompensiert und die Randbedingungen erfüllt. Es handelt sich also um ein gemischtes Randwertproblem; die Ausdrücke für die Verschiebungen müssen bestimmte vorgegebene Funktionen enthalten, während die Randspannungen verschwinden sollen.

Die Spannungsfunktion wird nun in der Form

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \tag{9}$$

angesetzt, wobei das zu φ_1 gehörige Verschiebungsfeld die mehrdeutigen Temperaturverschiebungen aufheben soll, während die mit φ_2 verknüpften Verschiebungen eindeutig sein müssen.

Für die aus einer Spannungsfunktion φ abgeleiteten Verschiebungen gilt im Falle eines ebenen Verzerrungszustandes bekanntlich [1]:

$$u + i\,v = \frac{1-\nu}{2\,G}\int (l + i\,m)\,dt - \frac{1}{2\,G}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right), \tag{10}$$

wobei

$$l = \Delta\varphi = \sigma_x + \sigma_y \tag{11}$$

und m mit l durch die *Cauchy-Riemann*schen Differentialgleichungen verknüpft ist, so daß $l + i\,m$ eine analytische Funktion der komplexen Vaiablen $t = x + i\,y$ ist.

Da das Auftreten mehrdeutiger Verschiebungen bei eindeutiger Spannungsfunktion an den Integralterm in (10) gebunden ist, muß, um das Verschwinden der mehrdeutigen Temperaturverschiebungen zu erzwingen, wie aus dem Vergleich von (8b) mit (10) hervorgeht, gelten

$$(1+\nu)\,\alpha_T \int Q_1\,dt = -\frac{1-\nu}{2\,G}\int (l_1 + i\,m_1)\,dt \tag{12}$$

oder nach Differentation und Aufspaltung in Real- und Imaginärteil

$$(1+\nu)\,\alpha_T T_1 = -\frac{1-\nu}{2\,G}\,\Delta\varphi_1\,, \tag{13}$$

woraus für φ_1 die *Poisson*sche Gleichung

$$\Delta\varphi_1 = -\,2\,G\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\alpha_T T_1 \tag{14}$$

folgt. Setzen wir zur Vereinfachung noch

$$-\,2\,G\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\alpha_T = \varkappa\,, \tag{15}$$

dann geht (14) über in

$$\Delta\varphi_1 = \varkappa\,T_1\,, \tag{14a}$$

und es besteht nun die Aufgabe, ein Partikulärintegral von (14a) zu bestimmen.

Da es sich voraussetzungsgemäß um einen stationären Temperaturzustand mit $\Delta T = 0$ handelt, genügt φ_1 der homogenen Bipotentialgleichung

$$\Delta\Delta\varphi_1 = 0\,; \tag{A}$$

Die Lösung von (14a) läßt sich daher durch Integrale von (A) darstellen. Das gleiche gilt in diesem Falle natürlich auch für die vollständige Lösung φ des Randwertproblems.

4. Partikulärintegral der Differentialgleichung $\Delta\varphi_1 = \varkappa\,T_1$. Wird in Anlehnung an bekannte Verfahren [2] die reelle Funktion φ_1 in Abhängigkeit von den zueinander konjugiert komplexen Minimalkoordinaten

$$t = x + i\,y \qquad\qquad \bar{t} = x - i\,y$$

dargestellt:

$$\varphi_1 = \bar{t}\,f(t) + t\,\bar{f}(\bar{t})\,, \tag{16}$$

wobei bekanntlich

$$\bar{f}(\bar{t}) = \overline{f(t)} \tag{17}$$

die konjugiert komplexe Funktion von $f(t)$ ist, und beachtet man, daß für den in Minimalkoordinaten angeschriebenen *Laplace*schen Operator gilt

$$\Delta \equiv 4\,\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial\bar{t}}\,,$$

so folgt aus (16)

$$\Delta\varphi_1 \equiv 4\,[f'(t) + \bar{f}'(\bar{t})]\,; \tag{18}$$

[1] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik Bd. 1, Seite 108 ff., 2. Aufl., Berlin 1953.
[2] *N. Muŝeliŝvili*, Z. angew. Math. Mech. 13 (1933), S. 264.

wegen (17) aber bestehen die Beziehungen

$$4 f'(t) = p + i q , \qquad 4 \overline{f'}(\bar{t}) = p - i q ,$$

so daß

$$\Delta \psi_1 = 2 p \tag{19}$$

als Realteil und

$$4 \left[f'(t) - \overline{f'}(\bar{t}) \right] = 2 i q \tag{20}$$

als Imaginärteil der komplexen Funktion

$$2 (p + i q) = 8 f'(t) \tag{21}$$

betrachtet werden können. Mit den Bezeichnungen von (10) bzw. (11) gilt ferner

$$8 f'(t) = l + i m . \tag{21a}$$

Vergleicht man nun (14a) unter Berücksichtigung von (19) mit (21), so folgt mit

$$Q_1 = T_1 + i S_1$$

die Gleichung

$$\varkappa Q_1 = 8 f'(t) , \tag{22}$$

aus der sich durch Integration die Funktion

$$f(t) = \frac{\varkappa}{8} \int Q_1 \, dt \tag{23}$$

ergibt, die voraussetzungsgemäß mehrdeutig ist.

Formen wir die rechte Seite durch Teilintegration um:

$$f(t) = \frac{\varkappa}{8} \left(Q_1 \, t - \int t \, \frac{dQ}{dt} \, dt \right) \tag{23a}$$

und bilden aus dem ersten Klammerterm mit $f_{1,0}(t) = \frac{\varkappa}{8} Q_1 t$ die Spannungsfunktion entsprechend (16):

$$\psi_{1,0} = \frac{\varkappa}{8} t \bar{t} \left[Q_1(t) + \bar{Q}_1(\bar{t}) \right] ,$$

die mit

$$t \bar{t} = r^2$$

und

$$Q_1(t) + \bar{Q}_1(\bar{t}) = 2 \, \Re \mathrm{e} \, Q_1(t) = 2 \, T_1$$

übergeht in

$$\psi_{1,0} = \frac{\varkappa}{4} r^2 T_1 ,$$

so ist $\psi_{1,0}$ nur vom Quadrat des Radiusvektors und der gegebenen Temperaturverteilung abhängig und daher offenbar eindeutig.

Der aus dem zweiten Glied folgende Verschiebungsanteil kann je nach der Querschnittsform und den gegebenen Randtemperaturen ein- oder mehrdeutig sein. Im ersten Fall, der z. B. beim Kreisring mit rotationssymmetrischer Verteilung der Randtemperaturen auftritt, ist er eindeutig und daher ohne Einfluß auf den Spannungszustand. Im zweiten Fall ist eine eindeutige Spannungsfunktion ψ_{11} zu bestimmen, welche die nunmehr an die Stelle von (22) tretende Bedingung

$$\oint f'_{11} \, dt + \frac{\varkappa}{8} \oint t \, dQ_1 = 0 \tag{22a}$$

erfüllt. Diese Forderung, die für jede Wärmequelle, d. h. bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen für jeden Lochrand aufzustellen ist, besagt: der Zuwachs, den die mehrdeutige Verschiebungsfunktion $u_{11} + i v_{11}$ nach einem Umlauf entlang einer das Loch umschließenden Kurve erfährt, muß den entsprechenden, von den Temperaturverzerrungen abhängigen Zuwachs, die „Restverschiebung", aufheben.

In praktischen Fällen kann aus der Beschaffenheit von $\oint t \, dQ_1$ unmittelbar auf die zur Kompensation der Restverschiebung erforderliche Funktion $u_{11}^* + i v_{11}^*$ und damit auf $f_{11}(t)$ geschlossen

werden; die Aufgabe besteht demnach nur darin, die den vorgegebenen Verschiebungsanteilen zugeordnete eindeutige Spannungsfunktion zu finden, die im Verein mit $\psi_{1,0}$ und ψ_2 den Randbedingungen genügt. Unter Verwendung von (21a) erhalten wir aus (10)

$$f_{11}(t) = + \frac{G}{4\,(1-\nu)}\,(u_1^* + i\,v_1^*)\,. \tag{23b}$$

Führt man (23b) in (16) ein, so folgt

$$\psi_{11} = + \frac{G}{4\,(1-\nu)}\,[\bar{t}\,(u_{11}^* + i\,v_{11}^*) + t\,(u_{11}^* - i\,v_{11}^*)] \tag{16a}$$

und schließlich in reeller Darstellung

$$\psi_{11} = + \frac{G}{2\,(1-\nu)}\,(x\,u_{11}^* + y\,v_{11}^*)\,. \tag{16b}$$

Die so gewonnene Spannungsfunktion wird aber die Eindeutigkeitsbedingung nicht erfüllen, da eine der beiden Verschiebungskomponenten mehrdeutig ist. Die gleichen Verschiebungsanteile u_{11}^*, v_{11}^* aber werden, wie sich mit (16a) bzw. (16b) leicht nachprüfen läßt, auch von den Spannungsfunktionen

$$\psi_{11}(u) = + \frac{G}{1-\nu}\,x\,u^* \tag{16c}$$

und

$$\psi_{11}(v) = + \frac{G}{1-\nu}\,y\,v^* \tag{16d}$$

geliefert, unter denen nun die im speziellen Fall eindeutige Funktion auszuwählen ist. Aus der Überlagerung von $\psi_{1,0}$ und ψ_{11} folgt schließlich die vollständige Spannungsfunktion ψ_1.

Die Spannungsfunktion ψ_2 ist nun aus Linearkombinationen von bekannten, dem speziellen Problem angepaßten Partikulärlösungen der Bipotentialgleichung so aufzubauen, daß mit der Funktion

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

die Randbedingungen erfüllt werden. Damit ist der Spannungszustand des Körpers zufolge des stationären Wärmeflusses bestimmt.

Die zur (x, y)-Ebene parallelen Spannungen sind mit der *Airy*schen Spannungsfunktion bekanntlich durch die Beziehung

$$\sigma_{ik} = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i\,\partial x_k} - \delta_{ik}\,\Delta\psi\right), \qquad x_i,\, x_k \neq z$$

verknüpft, wobei das *Kroneckers*ymbol wie üblich mit δ_{ik} bezeichnet ist.

Für die im ebenen Verzerrungszustand in der z-Richtung auftretende Spannung gilt

$$\bar{\sigma}_z = \nu\,\Delta\psi\,. \tag{a}$$

Aus der Überlagerung dieser Spannung mit der nach (4) berechneten, dem geschlitzten Querschnitt zugeordneten Spannung $\bar{\sigma}_z$ erhält man schließlich die endgültige Spannung in der Längsrichtung zu

$$\sigma_z = -\,2\,G\,(1+\nu)\,\alpha_T\,T + \nu\,\Delta\psi\,. \tag{24}$$

5. Von exzentrisch liegenden Kreiszylindern begrenztes Rohr; Temperaturspannungen. Als Beispiel soll hier der durch einen stationären Wärmefluß hervorgerufene Spannungszustand sowie das zugehörige Verschiebungsfeld in einem zylindrischen Rohr untersucht werden, dessen Querschnitt von zwei exzentrisch zueinander liegenden Kreisen begrenzt sei. Unter der Voraussetzung, daß die Temperaturverteilung in der Längsrichtung, der z-Achse unveränderlich sei, und daß die Endflächen unverschieblich festgehalten sind, werden die Querschnitte einem ebenen Verzerrungszustand unterworfen sein. Für die Berechnung sind im vorliegenden Falle zweckmäßig die durch die komplexe Transformation [1]

$$t = x + i\,y = i\,b\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{\zeta}{2} = i\,h\,(\mathfrak{Sin}\,\xi - i\,\sin\eta) \tag{25}$$

[1] Siehe etwa *W. Müller*, Ing.-Arch. 13 (1942), S. 37 ff.

bzw.

$$\zeta = \xi + i\,\eta = \ln \frac{t + i\,b}{t - i\,b} \tag{26}$$

mit

$$h = \frac{b}{\mathfrak{Cof}\,\xi - \cos\eta} \tag{27}$$

bestimmten Bipolarkoordinaten zu verwenden.

Den Koordinaten ξ = konst. enstprechen bekanntlich Kreise mit den (kartesischen) Mittelpunktskoordinaten $(0, z_{0\,\xi})$ und den Radien r_ξ, wobei $z_{0\,\xi}$ und r_ξ durch

$$\left.\begin{aligned} z_{0\,\xi} &= i\,b\,\mathfrak{Ctg}\,\xi\,, \\ r_\xi &= \frac{b}{\mathfrak{Sin}\,\xi} \end{aligned}\right\} \tag{28a}$$

gegeben sind, und den Koordinaten η = konst. die durch die Pole $Q_1(0, +b)$, $Q_2(0, -b)$ gehenden Kreise mit den (kartesischen) Mittelpunktskoordinaten $(z_{0\,\eta}, 0)$ und den Radien r_η, wobei hier

$$\left.\begin{aligned} z_{0\,\eta} &= b\,\operatorname{ctg}\eta\,, \\ r_\eta &= \frac{b}{\sin\eta} \end{aligned}\right\} \tag{28b}$$

gilt.

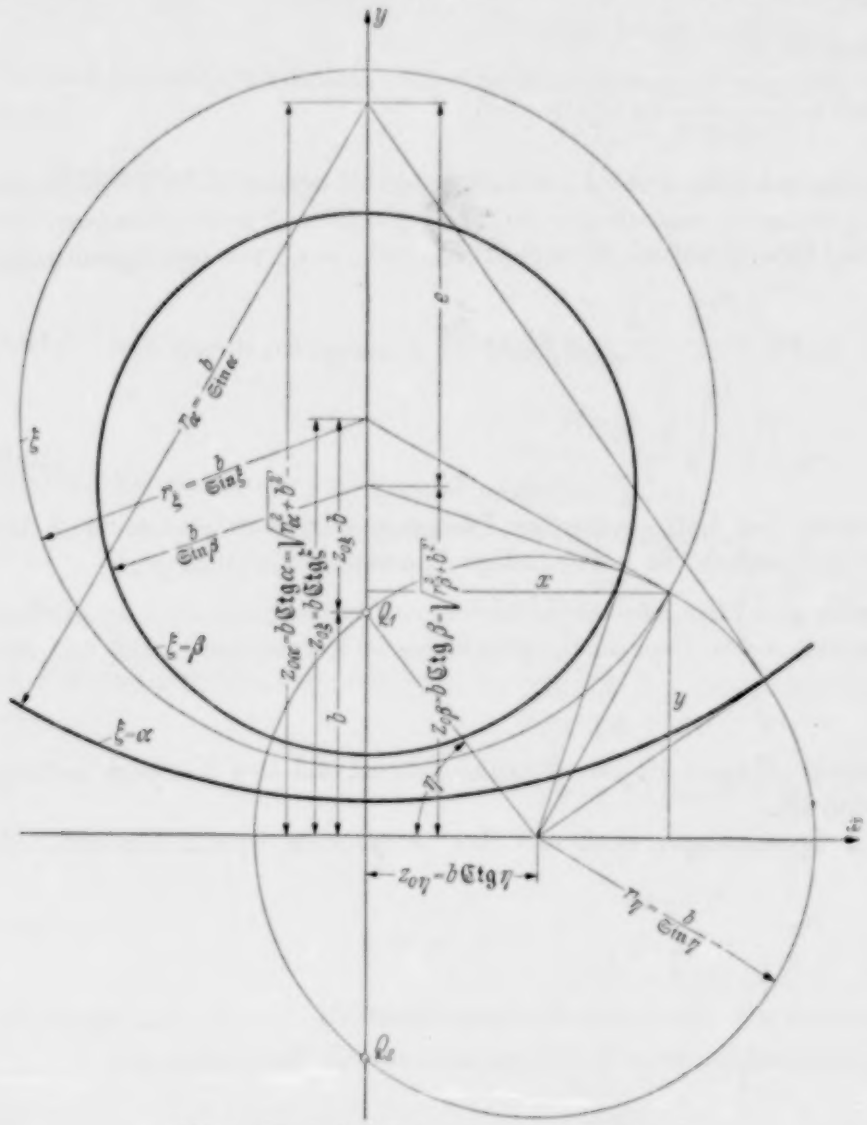

Abb. 1. Bipolarkoordinaten, geometrische Daten.

Mit den Beziehungen (28a) können bei gegebenen Radien R_1, R_2 der Randkreise und der Exzentrizität e die diesen Radien entsprechenden Koordinaten α, β und die Konstante b berechnet werden (Abb. 1).

Sei nun die Änderung gegenüber der zum spannungslosen Ausgangszustand gehörigen Temperatur am äußeren Rande α mit T_α, die am inneren Rande β mit T_β bezeichnet, dann wird die *Laplace*sche Differentialgleichung $\Delta T = 0$ durch den in ξ linearen Ansatz

$$T = c_0 + c_1\,\xi \tag{29}$$

befriedigt [1] und die Konstanten errechnen sich aus den Randbedingungen zu

$$c_0 = \frac{T_\alpha\,\beta - T_\beta\,\alpha}{\beta - \alpha}\,, \qquad c_1 = \frac{T_\beta - T_\alpha}{\beta - \alpha}\,. \tag{30}$$

Mehrdeutige Verschiebungen werden hier offensichtlich nur im Zusammenhang mit dem zweiten Term von (29) auftreten. Wir setzen demnach $T_0 = c_0$ und $T_1 = c_1\,\xi$. Mit $T_1 = c_1\,\xi$ ergibt sich nach (14)

$$\Delta\varphi_1 = -\,2\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\,G\,\alpha_T\,c_1\,\xi \tag{31}$$

oder

$$\Delta\varphi_1 = \varkappa\,c_1\,\xi\,, \tag{31a}$$

wenn zur Vereinfachung der Koeffizient von $c_1\,\xi$ entsprechend (15)

$$-\,2\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\,G\,\alpha_T = \varkappa$$

[1] *H. S. Carslaw*, Conduction of heat in solids, S. 98, New York 1945.

gesetzt wird. Mit

$$T_1 = c_1 \xi$$

folgt aus den *Cauchy-Riemann*schen Differentialgleichungen bis auf eine unwesentliche Konstante

$$S_1 = c_1 \eta ,$$

und wir erhalten

$$Q_1 = c_1 (\xi + i \eta)$$

oder nach Einsetzen von (26)

$$Q_1 = c_1 \zeta$$

und damit nach (23)

$$f(t) = \frac{\varkappa c_1}{8} \int \zeta \, dt . \tag{32}$$

Wird dt durch Bildung der Ableitung von (25) in der Veränderlichen ζ ausgedrückt:

$$dt = - \frac{i b}{\mathfrak{Cof}\, \zeta - 1} d\zeta ,$$

so geht (32) über in

$$f(t) = - \frac{\varkappa c_1}{8} \int \frac{\zeta \, i \, b}{\mathfrak{Cof}\, \zeta - 1} d\zeta , \tag{32a}$$

und wir erhalten aus dem Integral

$$f(t) = + \frac{\varkappa c_1}{8} i \, b \left(\zeta \, \mathfrak{Ctg}\, \frac{\zeta}{2} - 2 \ln \mathfrak{Sin}\, \frac{\zeta}{2} \right) \tag{33}$$

und unter Berücksichtigung von (25) sowie nach Umformen und Aufspaltung des zweiten in der Klammer stehenden Terms:

$$2 \, i \, b \ln \mathfrak{Sin}\, \frac{\zeta}{2} = - b \arccos \frac{\mathfrak{Cof}\, \xi \cos \eta - 1}{\mathfrak{Cof}\, \xi - \cos \eta} + i \, b \ln \frac{\mathfrak{Cof}\, \xi - \cos \eta}{2} ,$$

$$f(t) = + \frac{\varkappa c_1}{8} \left(\zeta \, t + b \varphi - i \, b \ln \frac{\mathfrak{Cof}\, \xi - \cos \eta}{2} \right), \tag{33a}$$

wenn

$$\arccos \frac{\mathfrak{Cof}\, \xi \cos \eta - 1}{\mathfrak{Cof}\, \xi - \cos \eta} = \varphi$$

gesetzt wird, wobei φ das auf den Kreisen $\xi =$ konst. von der positiven Y-Achse ($\eta = 0$) aus nach rechts gezählte Azimut bedeutet, wie unter Verwendung von (25) und (28a, b) leicht nachzuweisen ist.

Für die gesuchte Spannungsfunktion $\varphi^*_{1,0}$ ergibt sich nun nach (16) in komplexer Darstellung

$$\varphi^*_{1,0} = + \frac{\varkappa c_1}{8} \left[(\zeta + \bar{\zeta}) \, t \, \bar{t} - 2 \, i \, b \left(\bar{t} \ln \mathfrak{Sin}\, \frac{\zeta}{2} - t \ln \mathfrak{Sin}\, \frac{\bar{\zeta}}{2} \right) \right] . \tag{34}$$

Setzt man hier $\zeta, \bar{\zeta} = \xi - i \eta$, t und $\bar{t}$ nach (25), (26) unter Einführung von h nach (27) ein, so folgt in reeller Form

$$\varphi^*_{1,0} = + \frac{\varkappa c_1}{4} \left[h^2 \xi \, (\mathfrak{Sin}^2 \xi + \sin^2 \eta) + b \, h \left(\varphi \sin \eta - \mathfrak{Sin}\, \xi \ln \frac{\mathfrak{Cof}\, \xi - \cos \eta}{2} \right) \right] \tag{34a}$$

und nach weiterer Umformung

$$\varphi^*_{1,0} = + \frac{\varkappa c_1}{4} b \, h \left[\xi \, (\mathfrak{Cof}\, \xi + \cos \eta) + \varphi \sin \eta - \mathfrak{Sin}\, \xi \ln \frac{\mathfrak{Cof}\, \xi - \cos \eta}{2} \right] . \tag{34b}$$

Mit $f(t)$ erhält man ferner unter Berücksichtigung von (8b) und (23a)

$$u + i \, v = \frac{8 f(t)}{\varkappa} (1 + \nu) \, \alpha_T$$

und damit für die von Temperaturverzerrungen allein bewirkten Verschiebungen

$$u_1 = + (1 + \nu) \, \alpha_T \, c_1 \, (x \, \xi - y \, \eta + b \, \varphi) , \tag{35a}$$

$$v_1 = + (1 + \nu) \, \alpha_T \, c_1 \left(x \, \eta + y \, \xi - b \ln \frac{\mathfrak{Cof}\, \xi - \cos \eta}{2} \right) . \tag{35b}$$

Mit den beiden aus $(\zeta + \bar{\zeta})\, t\, \bar{t}$ folgenden Gliedern der Spannungsfunktion $\varphi^*_{1,0}$ können die $\zeta\, t$ entsprechenden mehrdeutigen Verschiebungsanteile in (35a) und (35b) identisch zum Verschwinden gebracht werden.

Dagegen ist der mit φ verknüpfte Ausdruck in (34a), (34b) offensichtlich mehrdeutig; damit würde auch der vom zweiten Klammerterm in (10) herrührende Verschiebungsanteil

$$-\frac{1}{2G}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = -\frac{1}{G}\,\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{t}} \tag{10a}$$

mehrdeutig werden, was unseren durch (12) ausgedrückten Voraussetzungen widerspräche. Zur Kompensation der aus (35a) folgenden mehrdeutigen Verschiebung

$$u^* = +(1+\nu)\,\alpha_T\, c_1\, b\, \varphi$$

kommt daher das Glied $\varphi \sin\eta$ der Spannungsfunktion $\varphi^*_{1,0}$ nicht in Betracht.

Nach Weglassen dieses Gliedes sowie des mit ihm gemäß (33) verbundenen Terms $-\operatorname{Sin}\xi \ln \frac{\operatorname{Cof}\xi - \cos\eta}{2}$ erhalten wir für die Spannungsfunktion $\varphi_{1,0}$ den Ausdruck

$$\varphi_{1,0} = +\frac{\varkappa\, c_1}{4}\, b\, h\, \xi\, (\operatorname{Cof}\xi + \cos\eta)\,. \tag{34c}$$

Die durch das explizite Auftreten der Funktion φ verursachte Mehrdeutigkeit der Verschiebungen kann aber in folgender Weise eliminiert werden:

Nach einem Umlauf haben die Verschiebungen u^* um den Betrag $(1+\nu)\,\alpha_T\, c_1\, b\, 2\pi$ zugenommen, einen hierzu proportionalen Zuwachs aber erfährt eine Verschiebungsfunktion, deren Komponente u_1^* mit den aus (10) folgenden Koeffizienten durch

$$u_1^* = \frac{1-\nu}{2G}\, C\, \eta - \frac{1}{2G}\, g(\xi, \eta) \tag{36}$$

gegeben ist, wobei C eine reelle Konstante und $g(\xi, \eta)$ eine eindeutige Funktion, die also keinen Beitrag zu dem Zuwachs liefert, bedeuten. Bestimmt man nun in (36) die Konstante C so, daß bei der Überlagerung $u^* + u_1^*$

$$(1+\nu)\,\alpha_T\, c_1\, b\, 2\pi + \frac{1-\nu}{2G}\, C\, 2\pi = 0$$

und damit

$$C = -2\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\alpha_T\, c_1\, G\, b \tag{37}$$

wird, der Zuwachs also verschwindet, dann ist $u^* + u_1^*$ eine eindeutige Funktion, da die Hauptwerte von

$$\varphi = \arccos \frac{\operatorname{Cof}\xi \cos\eta - 1}{\operatorname{Cof}\xi - \cos\eta}$$

mit den Werten von η in eindeutiger Weise verknüpft sind, demnach

$$u_1^* + \frac{1-\nu}{2G}\, C\, \eta$$

der eindeutigen Funktion $\varphi - \eta$ proportional ist.

Um die zur Verschiebungskomponente u_1^* gehörige eindeutige Spannungsfunktion φ_1^* zu erhalten, führen wir in (36) den oben bestimmten Wert von C ein; damit folgt für den maßgebenden ersten Term von (36), der mit u_{11}^* bezeichnet werden möge:

$$u_{11}^* = -(1+\nu)\,\alpha_T\, c_1\, b\, \eta\;; \tag{38}$$

und aus den *Cauchy-Riemann*schen Differentialgleichungen bis auf eine unwesentliche Konstante für die entsprechende, zur Y-Achse parallele Komponente

$$v_{11}^* = +(1+\nu)\,\alpha_T\, c_1\, b\, \xi\,, \tag{39}$$

die offensichtlich eindeutig ist. Die aus ihr gemäß (16d) gebildete Spannungsfunktion lautet nun

$$\varphi_{11} = +\frac{1+\nu}{1-\nu}\, G\,\alpha_T\, c_1\, b\, y\, \xi \tag{40}$$

oder unter Einführung von (15) und (25)

$$\psi_{11} = -\frac{1}{2}\varkappa c_1 b h \xi \operatorname{Sin}\xi . \tag{41}$$

Für die Spannungsfunktion $\psi_1 = \psi_{10} + \psi_{11}$ erhält man nun nach Einsetzen von (34c) und (41)

$$\psi_1 = +\frac{\varkappa c_1}{4} b h \xi (\operatorname{Cof}\xi + \sin\eta) - \frac{\varkappa c_1}{2} b h \xi \operatorname{Sin}\xi \tag{42}$$

und mit

$$+\frac{\varkappa c_1}{4} b = -\frac{1+\nu}{2(1-\nu)} G \alpha_T c_1 b = K \tag{43}$$

schließlich

$$\psi_1 = h K [\xi (\operatorname{Cof}\xi + \cos\eta) - 2\xi \operatorname{Sin}\xi] . \tag{42a}$$

Die Spannungsfunktion ψ_2 wird nun in der Form

$$\psi_2 = h [(A + C\operatorname{Cof}2\xi + D \operatorname{Sin}2\xi) \times \cos\eta + B\xi(\operatorname{Cof}\xi - \cos\eta) + H \operatorname{Cof}\xi] \tag{44}$$

angeschrieben, wobei die einzelnen Terme den für Bipolarkoordinaten entwickelten Partikularlösungen [1] der Bipotentialgleichung entsprechen. Mehrdeutige Verschiebungen treten zufolge ψ_2 nicht auf, da mit $\Delta\psi_2 = l_2$ offenbar $\oint (l_2 + i\, m_2)\, dt = 0$ wird. Aus der Überlagerung von (42) mit (44) erhalten wir die vollständige Spannungsfunktion:

$$\psi = h \{[A + (K-B)\xi + C\operatorname{Cof}2\xi + D\operatorname{Sin}2\xi]\cos\eta + [H + (K+B)\xi] \times \operatorname{Cof}\xi - 2K\xi \operatorname{Sin}\xi\}. \tag{45}$$

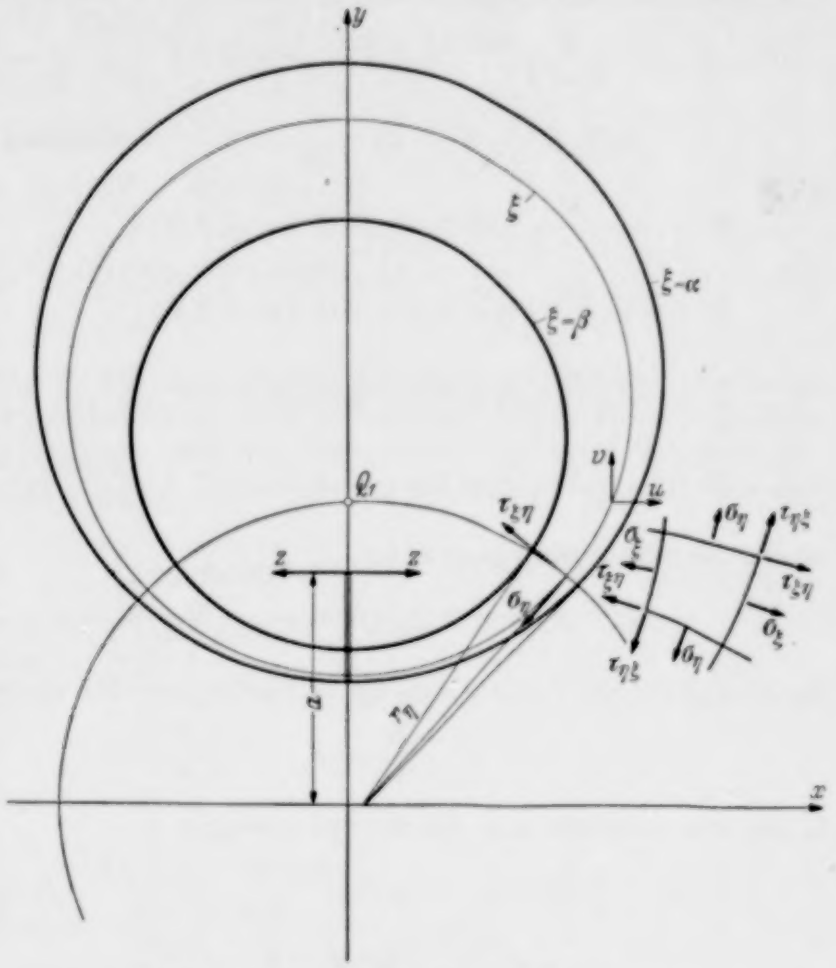

Abb. 2. Positive Spannungen und Verschiebungen im Bipolarkoordinatensystem.

Für die Spannungen (Abb. 2) folgen aus (45) nachstehende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\xi &= \frac{1}{b}\{A + H + C + 2K\xi + \operatorname{Sin}\xi [2C\operatorname{Sin}\xi + 2D\operatorname{Cof}\xi - (K+B)\operatorname{Cof}\xi + 2K\operatorname{Sin}\xi] \\
&\quad - [(K-B) + 2C\operatorname{Sin}2\xi + 2D\operatorname{Cof}2\xi)]\operatorname{Sin}\xi\cos\eta\} , \\
\sigma_\eta &= \frac{1}{b}\{A + H + C + 2K\xi + \operatorname{Sin}\xi [2C\operatorname{Sin}\xi + 2D\operatorname{Cof}\xi + (K+B)\operatorname{Cof}\xi - 2K(1+\operatorname{Cof}^2\xi)] \\
&\quad - 4(C\operatorname{Cof}2\xi + D\operatorname{Sin}2\xi)\cos^2\eta + [2C(2\operatorname{Cof}2\xi\operatorname{Cof}\xi - \operatorname{Sin}2\xi\operatorname{Sin}\xi) \\
&\quad + 2D(2\operatorname{Sin}2\xi\operatorname{Cof}\xi - \operatorname{Cof}2\xi\operatorname{Sin}\xi) - (3K+B)\operatorname{Sin}\xi - 2K\operatorname{Cof}\xi]\cos\eta\} , \\
\tau_{\xi\eta} &= \frac{1}{b}(\operatorname{Cof}\xi - \cos\eta)[K - B + 2(C\operatorname{Sin}2\xi + D\operatorname{Cof}2\xi)]\sin\eta .
\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Werden die Randbedingungen

$$\xi = \begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\end{Bmatrix} \qquad \sigma_\xi = \tau_{\xi\eta} = 0$$

in (46) eingeführt, so erhält man, da sowohl der von η freie, wie auch der mit $\cos\eta$ behaftete Ausdruck für α und β verschwinden müssen, die erforderlichen vier Gleichungen für die unbekanten Konstanten

$$A + H ,\ B ,\ C ,\ D ;$$

[1] *W. Müller*, a. a. O. S. 39.

A und H sind hierbei nur als eine Konstante zu werten, da sie in den Ausdrücken für die Spannungen, wie aus (46) ersichtlich, nur in der Kombination $A + H$ auftreten; ferner in den durch (10) gegebenen Verschiebungsgrößen für $\psi = A\,h\cos\eta$ bzw. $\psi = H\,h\,\mathfrak{Cof}\,\xi$ die Terme $\partial\psi/\partial x$ bzw. $\partial\psi/\partial y$ verschwinden, so daß die Verschiebungen nur von den Spannungssummen $\sigma_\xi + \sigma_\eta$ abhängen und daher ebenfalls den gemeinsamen Faktor $A + H$ haben müssen. Die Lösungen des Gleichungssystems lauten mit den neuen Konstanten $K - B = B'$ und $K + B = F'$

$$A + H = -\frac{K}{N-L}\left\{\frac{\mathfrak{Cof}\,2\beta - \mathfrak{Cof}\,2\alpha}{2}\left[\mathfrak{Sin}\,2\beta - \mathfrak{Tg}\,(\beta-\alpha)\right]\right.$$
$$\left. + (\beta+\alpha)\,(N-L) + \frac{L}{2}\left(\mathfrak{Sin}\,2\beta + \mathfrak{Sin}\,2\alpha\right) + (N-L)\,(\mathfrak{Cof}\,2\beta - 1)\right\}, \tag{47a}$$

$$B' = +\frac{K}{N-L}\left(\mathfrak{Cof}\,2\beta - \mathfrak{Cof}\,2\alpha + 2N\right), \tag{47b}$$

$$F' = -\frac{K}{N-L}\left(\mathfrak{Cof}\,2\beta - \mathfrak{Cof}\,2\alpha + 2L\right), \tag{47c}$$

$$C = +\frac{K}{N-L}\left(\mathfrak{Cof}\,2\beta - \mathfrak{Cof}\,2\alpha + 2N\right)\frac{\mathfrak{Sin}\,(\beta+\alpha)}{2\,\mathfrak{Cof}\,(\beta-\alpha)}, \tag{47d}$$

$$D = -\frac{K}{N-L}\left(\mathfrak{Cof}\,2\beta - \mathfrak{Cof}\,2\alpha + 2N\right)\frac{\mathfrak{Cof}\,(\beta+\alpha)}{2\,\mathfrak{Cof}\,(\beta-\alpha)}, \tag{47e}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$L = \beta - \alpha - \mathfrak{Tg}\,(\beta-\alpha), \quad N = \beta - \alpha - \frac{1}{2}\left(\mathfrak{Sin}\,2\beta - \mathfrak{Sin}\,2\alpha\right). \tag{48}$$

Setzt man für die Konstanten unter Einführung der weiteren Abkürzungen

$$\frac{A+H}{K} = J \qquad \frac{B'}{K} = 2N_0 \qquad \frac{F'}{K} = 2L_0 \tag{49}$$

in (46) ein, so erhält man für die Spannungen

$$\sigma_\xi = \frac{K}{b}\left\{(2\xi + J) + N_0\frac{\mathfrak{Sin}\,(\beta+\alpha-2\xi)}{\mathfrak{Cof}\,(\beta-\alpha)} - L_0\,\mathfrak{Sin}\,2\xi - (1 - \mathfrak{Cof}\,2\xi)\right.$$
$$\left. - 2N_0\left[1 - \frac{\mathfrak{Cof}\,(\beta+\alpha-2\xi)}{\mathfrak{Cof}\,(\beta-\alpha)}\right]\mathfrak{Sin}\,\xi\cos\eta\right\}, \tag{50a}$$

$$\sigma_\eta = \frac{K}{b}\left\{(2\xi + J) + N_0\frac{\mathfrak{Sin}\,(\beta+\alpha-2\xi)}{\mathfrak{Cof}\,(\beta-\alpha)} + L_0\,\mathfrak{Sin}\,2\xi - 2\,(\mathfrak{Cof}^2\,\xi + 1)\right.$$
$$- 4N_0\frac{\mathfrak{Sin}\,(\beta+\alpha-2\xi)}{\mathfrak{Cof}\,(\beta-\alpha)}\cos^2\eta$$
$$+ \left[2N_0\left(\frac{1}{2\,\mathfrak{Cof}\,(\beta-\alpha)}\left(3\,\mathfrak{Sin}\,(\beta+\alpha-\xi) + \mathfrak{Sin}\,(\beta+\alpha-3\xi)\right) - \mathfrak{Sin}\,\xi\right)\right.$$
$$\left.\left. - 4\,(L_0 - \mathfrak{Cof}\,\xi)\right]\cos\eta\right\}, \tag{50b}$$

$$\tau_{\xi\eta} = 2\frac{K}{b}N_0\left[1 - \frac{\mathfrak{Cof}\,(\beta+\alpha-2\xi)}{\mathfrak{Cof}\,(\beta-\alpha)}\right](\mathfrak{Cof}\,\xi - \cos\eta)\sin\eta. \tag{50c}$$

Mit der Erfüllung der auf die Normalspannungen σ_ξ bezüglichen Randbedingungen verschwinden zugleich auch, wie aus dem Vergleich von (50a) mit (50c) hervorgeht, die Schubspannungen an den Rändern α und β.

Damit sind die in der (x, y) Ebene liegenden Spannungen bestimmt; sie sind, wie aus (30b) zu ersehen ist, dem Temperaturgefälle $T_\beta - T_\alpha$ proportional, während die durch (24) gegebene Spannung σ_z auch von der gesamten Temperaturänderung abhängige Glieder enthält.

Das hier abgeleitete Spannungsfeld kann man sich auch durch ein senkrecht zur Symmetrieachse wirkendes Zug- oder Druckkräftepaar [1] hervorgerufen denken; der Rohrquerschnitt wird in $\eta = 0$ oder $\eta = \pi$ geschlitzt angenommen. Größe und Abstand a dieser Doppelkraft von der X-Achse sind so zu bestimmen, daß die von den Temperaturverzerrungen bewirkten gegen-

[1] *E. Tremmel*, Österr. Ing.-Arch. 8 (1954), S. 20 ff.

seitigen Verschiebungen der freien Endquerschnitte verschwinden. Für die auf die Längeneinheit der z-Richtung bezogene Größe der Doppelkraft erhält man den Wert (Abb. 2)

$$Z = -\frac{K L}{N - L}\left[\mathfrak{Cof}\, 2\beta - \mathfrak{Cof}\, 2\alpha + \frac{2\,(N_1 - L\,\bar{N})}{L}\right] \tag{51}$$

und für den Hebelsarm

$$a = -2\,b\,\frac{N + 1/2\,(\mathfrak{Cof}\, 2\beta - \mathfrak{Cof}\, 2\alpha)}{\mathfrak{Cof}\, 2\beta - \mathfrak{Cof}\, 2\alpha + \dfrac{2\,(N_1 - L\,\bar{N})}{L}} \tag{52}$$

mit den zur Abkürzung eingeführten Konstanten

$$N_1 = (\beta - \alpha)^2 - \mathfrak{Sin}^2\,(\beta - \alpha) \tag{53}$$

und

$$\bar{N} = (\beta - \alpha) + \frac{1}{2}\,(\mathfrak{Sin}\, 2\beta - \mathfrak{Sin}\, 2\alpha) \tag{54}$$

sowie L und N gemäß (48a) und (48b).

Die Bestimmung des resultierenden Verschiebungsfeldes bietet weiter keine Schwierigkeiten. Die aus den Temperaturverzerrungen allein, also im offenen Querschnitt folgenden Verschiebungen sind allgemein durch (3) gegeben. Mit der durch (29) festgelegten Temperaturverteilung erhalten wir für die mit c_0 verknüpften Glieder gemäß (8a) nach Durchführung der Integration

$$\omega_0(t) = u_0 + i\,v_0 = (1 + \nu)\,\alpha_T\,c_0\,t$$

und nach Aufspaltung in Real- und Imaginärteile die Verschiebungen u, v in den Richtungen x, y des kartesischen Koordinatensystems

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= (1 + \nu)\,\alpha_T\,c_0\,h\,\sin\eta\,, \\ v_0 &= (1 + \nu)\,\alpha_T\,c_0\,h\,\mathfrak{Sin}\,\xi\,. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

während die mit c_1 verbundenen Verschiebungsglieder bereits in (35a) und (35b) angegeben wurden.

Durch Zusammenfassung von (55) bzw. (35) ergeben sich schließlich die Verschiebungen für das in $\eta = \pi$ geschlitzte Rohr.

Überlagert man diesen Verschiebungsgrößen die nach (10) berechneten, aus der Spannungsfunktion ψ folgenden Ausdrücke, dann verbleibt das dem geschlossenen Rohr zugeordnete eindeutige Verschiebungsfeld.

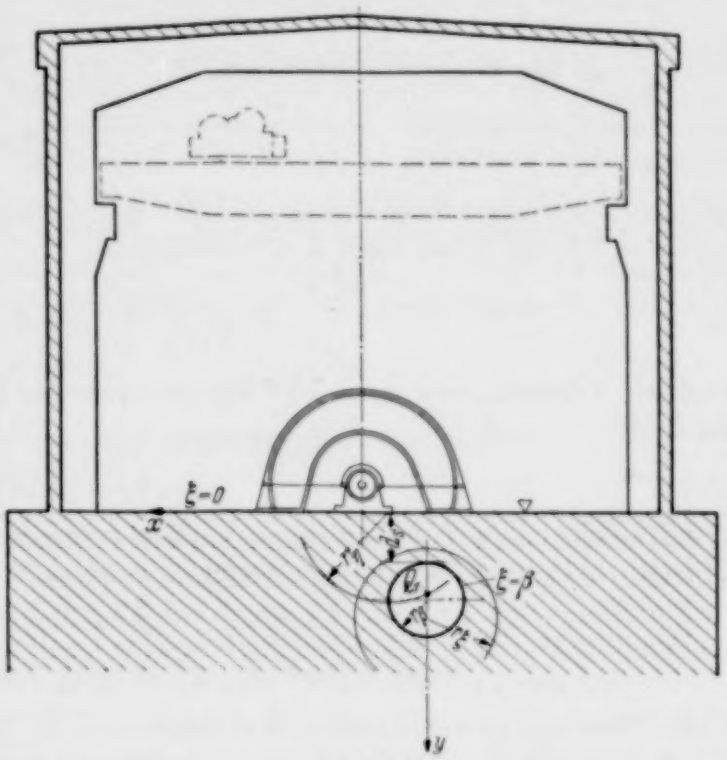

Abb. 3.

6. Zahlenbeispiel. Die Anwendung des hier geschilderten Rechnungsganges soll nur an einem praktischen Beispiel gezeigt werden. Unter dem Flur der Maschinenhalle eines Kraftwerkes sei eine Rohrleitung im Fundamentbeton gemäß Abb. 3 geführt. Die Hallentemperatur werde konstant auf dem Wert T_α gehalten, während die Temperatur an der Rohraußenwand längere Zeiträume hindurch den Wert T_β haben möge. Bleibt der Einfluß der Außentemperatur unberücksichtigt — bei den verhältnismäßig großen Abmessungen derartiger Hallen ist diese Vernachlässigung zulässig —, dann lassen sich Temperatur und Spannungsfeld, zumindest in der unmittelbaren Umgebung des Rohres, nach der hier abgeleiteten Berechnungsmethode mit hinreichender Genauigkeit bestimmen.

Wir können die Fundamentoberkante als Kreis mit unendlich großem Halbmesser und näherungsweise konstanter Umfangstemperatur T_α auffassen und der Untersuchung das durch diesen „Kreis" und den Rohrquerschnitt gegebene Bipolarkoordinatensystem zugrundelegen. Mit $r_\alpha = \infty$ folgt aus (28) $\mathfrak{Sin}\,\alpha = 0$ und damit $\alpha = 0$. Für den Rohrumfang gilt (Abb. 3)

$$|z_{0\beta}| = r_\beta + d_s\,,$$

wenn der Abstand des Scheitels von der Fundamentoberkante mit d_s bezeichnet wird, ferner nach (28)

$$z_{0\beta} = b \operatorname{Ctg} \beta , \qquad r_\beta = \frac{b}{\operatorname{Sin} \beta} ;$$

aus der Division der beiden letzten Gleichungen folgt schließlich

$$\operatorname{Cof} \beta = \frac{d_s}{r_\beta} + 1 .$$

Damit ist das den hier vorliegenden geometrischen Verhältnissen angepaßte Bipolarkoordinatensystem festgelegt, da mit dem bekannten Wert von β der Maßstabfaktor b aus (28) zu

$$b = r_\beta \operatorname{Sin} \beta$$

berechnet werden kann. Bemerkt sei noch, daß die zweite Koordinate η von der Rohrsohle aus, wo sie den Wert Null hat, gegen den Scheitel, für den $\eta = \pi$ wird, zu zählen ist.

Mit dem hier angenommenen Verhältnis $d_s/r_\beta = 1{,}5$ wird $\operatorname{Cof} \beta = 2{,}5$, und daraus ergibt sich weiter $\beta = 1{,}5668$. Für die zur Bestimmung der Spannungen allein erforderliche Konstante c_1 in

$$T = c_0 + c_1 \xi$$

erhält man nach (30)

$$c_1 = \frac{T_\beta - T_\alpha}{\beta}$$

oder, wenn die Temperaturdifferenz $T_\beta - T_\alpha = \overline{\Delta} T$ gesetzt wird,

$$c_1 = \frac{\overline{\Delta} T}{\beta} = 0{,}6382 \, \overline{\Delta} T .$$

Nehmen wir den Elastizitätsmodul des Betons mit $E = 2{,}5 \cdot 10^5 \, \mathrm{kg/cm^2}$, die *Poissonsche* Zahl mit $\nu = 1/6$ an, dann folgt der Schubmodul

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 1{,}071 \cdot 10^5 \, \mathrm{kg/cm^2} ,$$

und wir erhalten mit $\alpha_T = 10^{-5}$ für die von der Temperaturdifferenz abhängige Konstante K nach (43)

$$K = - 0{,}4787 \, b \, \overline{\Delta} T .$$

Zur Berechnung der Spannungen werden ferner noch die oben angegebenen Konstanten L und N bzw. J, L_0 und N_0 benötigt; es ist

$$L = + 0{,}6503 , \qquad J = + 0{,}2396 , \qquad 2 N_0 = - 0{,}5233 .$$
$$N = - 4{,}1614 , \qquad 2 L_0 = + 2{,}8362 ,$$

Führt man die so bestimmten Konstanten in die für die Spannungen berechneten allgemeinen Ausdrücke ein, dann fällt der Maßstabfaktor b heraus, und wir erhalten z. B. für die vor allem interessierenden Spannungen σ_η in den einzelnen ausgezeichneten Punkten der Symmetrieachse die nachstehenden Werte:

a) an der Fundamentoberkante für $\xi = 0$, $\eta = \pi$

$$\sigma_\eta = + 2{,}277 \, \overline{\Delta} T ,$$

b) am Rohrscheitel für $\xi = \beta$, $\eta = \pi$

$$\sigma_\eta = - 0{,}705 \, \overline{\Delta} T ,$$

c) an der Rohrsohle für $\xi = \beta$, $\eta = 0$

$$\sigma_\eta = - 1{,}498 \, \overline{\Delta} T .$$

Um Aufschluß über die Größenordnung der größten Schubspannung zu bekommen, wurde aus (38) $\frac{\partial \tau}{\partial \xi} = 0$, $\frac{\partial \tau}{\partial \eta} = 0$ gebildet und die beiden Koordinaten $\xi_{\tau\,max}$, $\eta_{\tau\,max}$ durch Iteration bestimmt. Mit $\xi_{\tau\,max} = 0{,}987$ und $\eta_{\tau\,max} = 1{,}135$ ergibt sich $\tau_{max} = + 0{,}131 \, \overline{\Delta} T$.

Die Ergebnisse zeigen, daß schon geringe Temperaturunterschiede Spannungen hervorrufen, die die Rißsicherheit des Fundamentbetons beträchtlich verringern können. Mit der, entsprechend der Temperatur des Stollenwassers, angenommenen Rohrtemperatur von etwa 8° und der Raumtemperatur in der Halle, die 15° betragen möge, folgt eine Temperaturdifferenz

$$\bar{\Delta} T = T_\beta - T_\alpha = -7^\circ;$$

damit ergibt sich am Rohrscheitel eine Zugspannung von $-0{,}705 \cdot -7$, also rund 5 kg/cm², während sie ihren Größtwert mit 10,5 kg/cm² an der Sohle erreicht. Die Druckspannung an der Fundamentoberkante hält sich mit rund 16 kg/cm² ebenso wie die größte Schubspannung mit rund 1 kg/cm² in mäßigen Grenzen. In praktischen Fällen werden neben den Spannungen auch die Verschiebungen zu bestimmen sein, da durch sie gegebenenfalls unerwünschte Kraftwirkungen auf das Rohr verursacht werden können.

Wenn die vorstehende Untersuchung auch wegen der verschiedenen Idealisierungen kein genaues Bild des Spannungs- und noch weniger des Verschiebungsfeldes liefert, so erhält man doch einigermaßen wirklichkeitstreue Aufschlüsse über die Beanspruchung des Fundamentblockes.

Demgegenüber müßten hier im Rahmen einer baustatischen Berechnung, bei welcher der zwischen Maschinenhausflur und Rohr liegende Betonkörper als Gewölbe aufzufassen wäre, willkürliche Annahmen über die Lage der Kämpferquerschnitte getroffen werden; schließlich aber wäre der Arbeitsaufwand bei halbwegs genauer Erfassung des veränderlichen Trägheitsmoments keineswegs geringer als nach dem hier erörterten scheibentheoretischen Verfahren.

7. Ausblick und Schlußfolgerung. Ähnlich wie in dem hier behandelten Zahlenbeispiel könnten auch die Spannungen in einem Motorblock mit kreisförmiger, von einem erhitzten Medium durchströmten Bohrung näherungsweise berechnet werden. Schließlich lassen sich auch die Verschiebungsfelder eingespannter Gewölbemauerlamellen in einfacher Weise gemäß (40) bestimmen und mit ihnen annähernd die aus der Einspannung folgenden Schnittgrößen [1].

Die Untersuchung des von exzentrischen Kreisen begrenzten Ringes bringt weiter keine Schwierigkeiten; für den ebenen Spannungszustand wird $\sigma_{zz} = 0$ und $\varepsilon_{zz} = \alpha_T T$, so daß in (3) der Faktor $(1 + \mu)$ durch 1 zu ersetzen ist; da ferner der Beiwert des Integralterms in (10) in

$$\frac{1}{2G}\,\frac{1}{(1+\nu)}$$

übergeht [2], erhalten wir hier für den Koeffizienten des Störungsgliedes in (14) bzw. (14a)

$$\bar{\varkappa} = -2G(1+\nu)\alpha_T . \tag{15a}$$

Ebenso kann auch der Fall einer exzentrisch liegenden Wärmequelle in der vollen Kreisscheibe behandelt werden. Diese Berechnungen aber beziehen sich strenggenommen nur auf Scheiben mit wärmeabgeschirmten Oberflächen, die für die Praxis kaum Bedeutung haben. Das Verfahren wäre also, wie es für zentrische Kreisringe und andere Scheiben bereits durchgeführt wurde [3], auf die Berücksichtigung von Wärmeverlusten an den Oberflächen zu erweitern.

Die hier speziell für den von zwei exzentrisch liegenden Kreisen begrenzten Querschnitt erhaltenen Ergebnisse gelten in ähnlicher Form, wie schon erwähnt, im Falle stationärer Wärmeflüsse für alle geschlossenen Ringquerschnitte; bei symmetrischen Temperaturverteilungen müssen sich, da die Verträglichkeitsbedingungen erfüllt und die Ränder spannungsfrei sind, die Spannungen zu einer im allgemeinen nicht verschwindenden Doppelkraft und einem Momentenpaar zusammenfassen lassen. Bei unsymmetrischen Temperaturverteilungen oder Querschnitten tritt zu diesen Schnittgrößen noch ein Schubkräftepaar [4] hinzu. Die Spannungsfunktion ψ wird daher immer aus den, diesen Belastungsfällen im offenen Ring zugeordneten Spannungsfunktionen aufgebaut sein. Sie kann also, wenn diese letzteren bekannt sind, worauf noch, ohne auf Einzelheiten einzugehen, hingewiesen sei, unter Verwendung von (14a) unmittelbar berechnet werden.

(Eingegangen am 28. Mai 1954.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Erwin Tremmel*, Zell am See (Österreich), Haus Lebzelter.

[1] *E. Tremmel*, a. a. O. S. 34.
[2] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, a. a. O. S. 112.
[3] *E. Melan*, Österr. Bauz. 8 (1953), S. 89 ff.
[4] *E. Tremmel*, a. a. O. S. 26.

Eine neue hydrodynamische Analogie zur Torsion prismatischer Stäbe.

Von E. Pestel.

1. Einleitung. Es ist eine bekannte Tatsache, daß häufig die wesentlichen Eigenschaften von zwei oder mehreren verschiedenen physikalischen Erscheinungen in identischer mathematischer Form zum Ausdruck kommen. Wenn eine vollständige mathematische Identität besteht, genügt es, nur eines dieser physikalischen Systeme zu studieren, um gleichzeitig eine Aussage auch über das Verhalten der mathematisch analogen zu gewinnen.

Von dieser Möglichkeit konnte man besonders in der Elastizitätstheorie vielfach Gebrauch machen, da hier zahlreiche mathematische Analogien entdeckt wurden. Unter diesen nehmen die Gleichnisse für die Aufgabe, den Spannungs- und Formänderungszustand eines auf Torsion beanspruchten prismatischen Stabes zu untersuchen, insbesondere das für dieses Problem vor 50 Jahren von *Prandtl* gefundene Membran-Gleichnis, wohl die bedeutsamste Stellung ein. Neben dem *Prandtl*schen Gleichnis ist für eine anschauliche Erörterung des Torsions-Problems gelegentlich auch das *Thomson*sche Strömungsgleichnis herangezogen worden, das die mathematische Analogie zwischen der elastizitätstheoretischen Aufgabe und dem ebenen Strömungsvorgang einer mit konstanter Wirbelstärke strömenden reibungslosen Flüssigkeit benutzt. Im Gegensatz dazu liegt dem neuen Strömungsgleichnis das Verhalten einer viskosen Flüssigkeit zugrunde. Dabei betrachten wir einen Strömungsvorgang, der wie folgt entsteht.

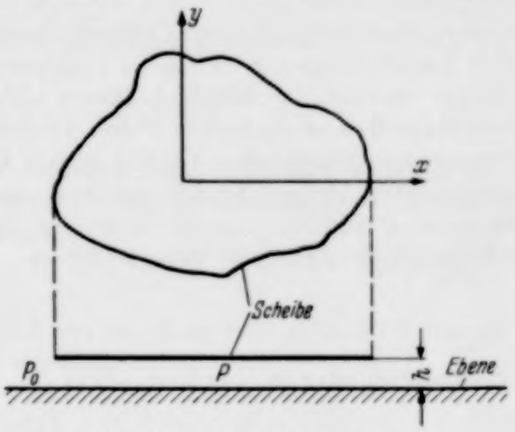

Abb. 1. Hydrodynamisches Modell.

Eine Scheibe beliebigen Umrisses sei gelagert auf einer Flüssigkeitsschicht, deren Träger eine unendlich große Ebene ist. Scheibe und Ebene sind parallel zueinander (Abb. 1). Sie werden relativ gegeneinander längs ihrer Normalen mit endlicher Geschwindigkeit bewegt. Wird dabei die Spalthöhe h zwischen Scheibe und Ebene verringert, so wird Flüssigkeit aus der Schicht zwischen Scheibe und Ebene herausgedrückt. Dadurch entsteht in dem Spalt ein i. a. von Ort zu Ort verschiedener Überdruck p gegenüber dem Druck p_0 außerhalb der Scheibe. Es läßt sich nun u. a. zeigen, daß die Kraft, welche die beschriebene Bewegung der Scheibe hervorbringt, dem Drillmoment zugeordnet werden kann, das einen prismatischen Stab von einem Querschnitt gleich dem Umriß der Scheibe verdrillt.

2. Mathematische Formulierung des Torsionsproblems und der hydrodynamischen Analogie. Wenn wir unter den bekannten Voraussetzungen der *St. Venant*schen Theorie für die Ermittlung der Schubspannungen und der Formänderungen in einem auf Torsion beanspruchten prismatischen Stabe, dessen Achse mit der z-Achse zusammenfallen möge, eine Spannungsfunktion φ derart definieren, daß

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{und} \quad \tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{1}$$

sind, führt uns die Beachtung der Verträglichkeitsbedingungen auf die bekannte Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2\,G\,\vartheta\,. \tag{2}$$

Darin ist ϑ der Drillwinkel und G der Schubmodul. Als Randbedingung erhalten wir bei einfach zusammenhängenden Querschnitten

$$\varphi_R = k_0\,. \tag{3}$$

Das den Drillwinkel ϑ hervorrufende Drillmoment ergibt sich dann zu

$$M_z = 2 \int_{F_0} \varphi \, dF - 2\,k_0 F_0\,, \tag{4}$$

wenn F_0 die Querschnittsfläche des Stabes ist.

Diesen Gleichungen lassen sich wie folgt die entsprechenden des Strömungsgleichnisses gegenüberstellen. Unter der Annahme, daß die Spaltdicke h klein gegenüber den Abmessungen der Scheibe ist, und ferner auch die zeitliche Änderung von h genügend klein [1] ist, sind die Voraussetzungen für die sogenannte schleichende Strömung gegeben, die z. B. auch der mathematischen Behandlung der hydrodynamischen Gleitlagertheorie zugrunde liegt. Es läßt sich ferner ohne Schwierigkeit der Nachweis führen, daß dann die Geschwindigkeitskomponente der Strömung in z Richtung vernachlässigt werden kann. Wenn wir ferner unter Berücksichtigung der Haftbedingung an Scheibe und Ebene an Stelle der Geschwindigkeitskomponenten in der x- bzw. y-Richtung durch Mittelbildung die an jedem Ort (x, y) im Spalt strömende Flüssigkeitsmenge q_x und q_y einführen, erhalten wir folgende einfache Beziehungen zwischen dem Druck p und der strömenden Flüssigkeitsmenge, wenn mit μ die absolute Zähigkeit der Flüssigkeit bezeichnet wird:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\,\mu}{h^3}\,q_x \quad \text{und} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{12\,\mu}{h^3}\,q_y\,. \tag{1'}$$

Die Erfüllung der Kontinuitätsbedingung führt auf folgende Gleichung:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -\dot{h}\,.$$

Die Elimination von q_x und q_y liefert dann

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{12\,\mu}{h^3}\,\dot{h}\,. \tag{2'}$$

Am Rande herrscht der Druck

$$p_R = p_0\,. \tag{3'}$$

Ferner ergibt sich, wie man leicht sieht, als Kraft P, welche die Scheibe mit der Geschwindigkeit $\dot{h}$ relativ zur Ebene bewegt,

$$P = \int_{F_0} p\,dF - p_0 F_0\,. \tag{4'}$$

Wir erkennen somit folgende Zuordnung zwischen den wesentlichen Größen des Strömungs- und des Elastizitätsproblems:

$$\left.\begin{aligned} 2\,\varphi &\to p\,,\\ -2\,G\,\vartheta &\to \frac{6\mu}{h^3}\,\dot{h}\,,\\ 2\,k_0 &\to p_0\,,\\ M_z &\to P\,,\\ \tau_{zy} &\to \frac{6\,\mu}{h^3}\,q_x\,,\\ \tau_{zx} &\to -\frac{6\,\mu}{h^3}\,q_y\,. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

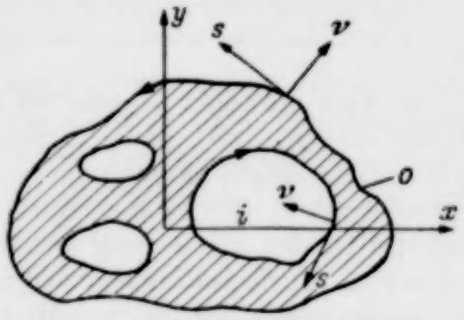

Abb. 2. Mehrfach zusammenhängender Querschnitt.

Wenn wir nun zur Behandlung mehrfach zusammenhängender Querschnitte schreiten (Abb. 2), haben wir die Gleichungen für das Torsionsproblem noch wie folgt zu erweitern. Zu der Randbedingung (3) treten die entsprechenden für die Ränder der inneren Bereiche, so daß wir an Stelle von (3) setzen

$$\varphi_{R_i} = k_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{3a}$$

Außerdem hat die Spannungsfunktion φ, damit die Eindeutigkeit der Querschnittsverwölbung gewährleistet ist, an den inneren Rändern noch folgende Bedingung zu erfüllen:

$$\oint_{R_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\,ds = 2\,G\,\vartheta\,F_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{6}$$

Darin bezeichnet F_i die Querschnittsfläche des i-ten inneren Bereiches. Für das Drillmoment erhalten wir

$$M_z = 2\int \varphi\,dF - 2\,k_0 F_0 + 2\sum_{i=1}^{n} k_i F_i\,. \tag{4a}$$

[1] Es läßt sich zeigen, daß $\dot{h}$ als genügend klein angesehen werden kann, solange $h\,\dot{h}/\nu < 0{,}1$ ist; darin ist ν die kinematische Zähigkeit der Flüssigkeit.

In (4a) ist das Integral über die schraffierte Fläche von Abb. 2 zu erstrecken. Entsprechend erhalten wir nun unter Benutzung der Zuordnungen (5) als Randbedingungen für das Strömungsproblem

$$p_{R_i} = p_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{3'a}$$

und damit für die Kraft P

$$P = \int p\, dF - p_0 F_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i F_i . \tag{4'a}$$

Ebenso erhalten wir als Zuordnung zu (6)

$$\oint_{K^i} \frac{\partial p}{\partial \nu}\, ds = -\frac{12\,\mu}{h^3}\,\dot{h}\,F_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Im Hinblick darauf, daß

$$\frac{\partial p}{\partial \nu} = -\frac{12\,\mu}{h^3}\,q_\nu \tag{1''}$$

ist, ergibt sich folgende Beziehung:

$$\oint_{R_i} q_\nu\, ds = \dot{h}\,F_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{6'}$$

daraus folgt, daß der Druck p_i in den inneren Bereichen i so zu halten ist, daß aus jedem Loch i soviel Flüssigkeit herausströmt, wie ein Stempel vom Querschnitt F_i verdrängen würde, wenn er mit der Geschwindigkeit $\dot{h}$ abwärts bewegt würde. Die experimentelle Erfüllung dieser Bedingung gestaltet sich im Gegensatz zu der entsprechenden beim Seifenhautgleichnis sehr einfach, wenn man über den inneren Bereichen Zylinder[1] vom Querschnitt F_i entsprechend Abb. 3 anordnet.

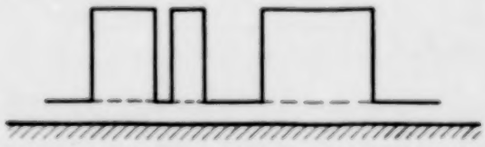

Abb. 3. Modell für mehrfach zusammenhängenden Querschnitt.

Abb. 4. Schmaler Rechteckquerschnitt.

3. Anwendungsbeispiele für das Strömungsgleichnis. Es läßt sich an Hand einfacher Beispiele zeigen, daß dieses Strömungsgleichnis in seiner Anwendung als Gedankenexperiment vielseitige Möglichkeiten bietet.

a) Schmaler Rechteckquerschnitt. Man erkennt hier ohne weiteres, daß bei der in der Einleitung beschriebenen Bewegung einer Scheibe von der Umrißform eines schmalen Rechteckquerschnittes (Abb. 4) der Druckanstieg, der der Schubspannung gemäß (5) proportional ist, in der Mitte der Langseite des Rechtecks am größten ist. Wir erhalten einen Näherungswert für den hier herrschenden Druckanstieg durch die Betrachtung eines unendlich langen schmalen Rechtecks, bei dem ja nur noch ein eindimensionaler Strömungsvorgang quer zur Langseite stattfindet; d. h. q_y würde hier identisch verschwinden, und wir würden nach zweimaliger Integration der übriggebliebenen Gleichung (1') für einen Plattenstreifen der Länge l ($l \gg d$) angenähert folgende Druckkraft erhalten, wenn $p_0 = 0$ gesetzt wird:

$$P = -\,l\,d^3\,\frac{\mu\,\dot{h}}{h^3}. \tag{7}$$

Mit Benutzung der Zuordnungen (5) $P \to M_z$ und $\frac{3\,\mu}{h^3}\,\dot{h} \to G\,\vartheta$ ergibt sich der Torsionswiderstand des Querschnittes sofort zu

$$J_t = \frac{M_z}{G\,\vartheta} = \frac{l\,d^3}{3}. \tag{8}$$

Dieser Wert ist je nach dem Verhältnis l/d etwas zu hoch, wie man im Hinblick auf das Strömungsgleichnis leicht einsieht, wenn man bedenkt, daß bei endlichem Wert von l q_y nicht verschwindet, und damit der Druck p mit wachsendem $|y|$ abnimmt.

[1] Der Verfasser verdankt einer Diskussionsbemerkung von Herrn Dr. *Berger*, Wien, den Hinweis auf diese experimentelle Möglichkeit.

Die Schubspannungen lassen sich am Ort $y = 0$, wie folgt ermitteln. Hier ist aus Symmetriegründen $q_y = 0$; also liefert die Kontinuitätsbedingung

$$q_x = \dot{h}\, x\,.$$

Wenn wir wieder von der Voraussetzung Gebrauch machen, daß $l \gg d$, erhalten wir wegen $\dot{h} = -\,P\,h^3/\mu\, l\, d^3$ [vgl. (7)] und im Hinblick auf (5):

$$q_x \to \tau_{zy}\,\frac{h^3}{6\,\mu} \quad \text{und} \quad P \to M_z\,,$$

$$\tau_{zy} = -\,6\,\frac{M_z}{l\,d^3}\,x\,,$$

insbesondere für $x = d/2$

$$|\tau_{zy\,max}| = \frac{3}{l\,d^2}\,M_z\,. \tag{9}$$

Der so erhaltene Näherungswert ist für endliche Werte l/d ($l \gg d$) etwas zu klein, da bei gegebenem M_z, also vorgeschriebenem P, der Druckanstieg dp/dx an der Stelle ($x = \pm\, d/2$; $y = 0$) größer sein muß, wenn q_y für $y \neq 0$ nicht verschwindet und damit dp/dx mit wachsendem $|y|$ abnimmt — für ($x = \pm\, d/2$; $y = \pm\, l/2$) wird ja $dp/dx = 0$ —, als wenn, wie hier vorausgesetzt, q_y identisch verschwindet und somit dp/dx bei festgehaltenem x konstant ist.

Man erkennt ferner, daß es für die größte Schubspannung und den Torsionswiderstand unwesentlich ist, ob die Langseite des schmalen Rechteckquerschnittes gerade oder gekrümmt ist (Abb. 5).

Abb. 5. Gekrümmter schmaler Rechteckquerschnitt.

b) Aus schmalen Rechtecken zusammengesetzte Querschnitte. Wir betrachten gewalzte, geschweißte oder genietete einfach zusammenhängende Querschnitte entsprechend Abb. 6, deren wesentliches Kennzeichen darin zu suchen ist, daß der Stabquerschnitt aus Querschnittsbestandteilen ähnlich den unter a) behandelten aufgebaut ist.

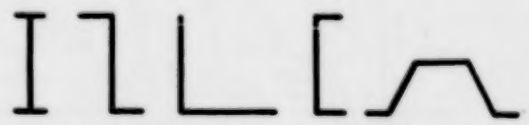
Abb. 6. Zusammengesetzte Querschnitte.

Es leuchtet hier sofort ein, daß die Kraft P, die für die in der Einleitung beschriebene Bewegung der Gesamtquerschnittsfläche F mit der Geschwindigkeit $\dot{h}$ aufgebracht werden muß, nur wenig größer ist als die Summe der Kräfte P_j, die jeweils für die Bewegung der Querschnittsbestandteile F_j mit der gleichen Geschwindigkeit $\dot{h}$ erforderlich sind. Folglich gilt, wenn $F = \sum_j F_j$ ist,

$$P > \sum_j P_j\,.$$

Da unter der Voraussetzung ($l_j \gg d_j$) P_j nur wenig kleiner als die rechte Seite von (7) ist, kann näherungsweise

$$P \approx \frac{\mu\,\dot{h}}{h^3}\sum_j l_j\,d_j^3 \tag{10}$$

gesetzt werden. Im Hinblick auf die Zuordnungen (5) folgt dann

$$J_t \approx \frac{1}{3}\sum_j l_j\,d_j^3\,, \tag{11}$$

wenn die Länge jedes Querschnittbestandteiles l_j und seine Dicke d_j beträgt.

Im Hinblick auf (10) übernimmt wegen

$$\frac{P_j}{P} = \frac{M_j}{M_z}$$

jeder Querschnittsbestandteil j folgenden Bruchteil des gesamten Torsionsmomentes M_z:

$$M_j = \frac{l_j\,d_j^3}{\sum_j l_j\,d_j^3}\,M_z\,.$$

Wegen (9) gilt

$$\tau_{j\,max} \approx \frac{3}{l_j d_j^2} M_j ,$$

also

$$\tau_{j\,max} \approx \frac{3}{l_j d_j^2} \cdot \frac{l_j d_j^3}{\sum\limits_j l_j d_j^3} M_z = 3 \frac{d_j}{\sum\limits_j l_j d_j^3} M_z .$$

Die größte Schubspannung ist also in dem dicksten Querschnittsbestandteil zu erwarten; sie beträgt näherungsweise

$$\tau_{max} \approx \frac{d_{max}}{\sum\limits_j l_j d_j^3} M_z . \tag{12}$$

c) Ableitung der Formel von *Bredt*. Bei prismatischen Hohlstäben geringer Wandstärke gelingt die Bestimmung der interessierenden Größen mit Hilfe des Strömungsgleichnisses in besonders anschaulicher Weise. Nach den Ausführungen am Schluß des Abschnittes 2 (vgl. auch Abb. 3) würde das einem dünnwandigen Hohlquerschnitt entsprechende Analogiemodell etwa, wie in Abb. 7 gezeigt, auszubilden sein. Die Breite $\delta(s)$ des „Hutrandes" des unten offenen und oben geschlossenen Zylinders ist jeweils gleich der Wandstärke des Hohlquerschnittes. Aus der Abb. 8 ist zu ersehen, wie man sich die Durchführung eines solchen Modell-

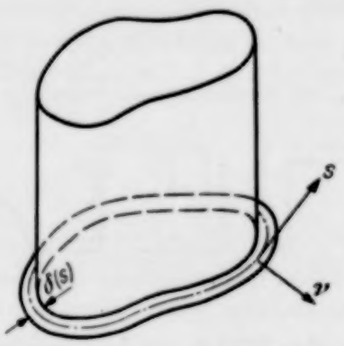

Abb. 7. Modell für dünnwandigen Hohlquerschnitt.

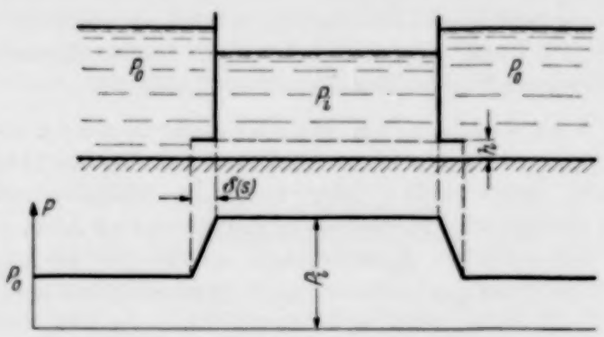

Abb. 8. Modellversuch und Druckverteilung.

versuches vorzustellen hat, und welche Druckverhältnisse sich dabei ergeben. Unter der Voraussetzung, daß der „Hutrand" überall sehr schmal ist, kann der Druckabfall von p_i auf p_0 hinreichend genau als geradlinig aufgefaßt werden. Daraus folgt, daß $P = (p_i - p_0)\, F_m$ ist, worin F_m die von der Mittellinie des Hutrandes umschlossene Fläche ist. Wegen

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{p_i - p_0}{\delta(s)} = -\frac{12\,\mu}{h^3} q_v$$

[vgl. (1'')] ergibt sich

$$P = \frac{12\,\mu}{h^3} q_v\, \delta(s)\, F_m . \tag{13}$$

Im Hinblick auf die Zuordnung (5):

$$\frac{6\,\mu}{h^3} q_v \to \tau_s$$

und $P \to M_z$ folgt

$$M_z = 2\,\tau_s\, \delta(s)\, F_m . \tag{14}$$

Aus $p_i - p_0 = \text{konst.}$ folgt ferner $\tau_s\, \delta(s) = \text{konst.}$; d. h. der sogenannte „Schubfluß" ist konstant. Da nach (6') und (13)

$$\dot{h} = \frac{\oint\limits_{R_m} q_v\, ds}{F_m} = \frac{h^3 P}{12\,\mu F_m^2} \oint\limits_{R_m} \frac{ds}{\delta(s)}$$

ist, liefert die Zuordnung (5): $\frac{6\,\mu}{h^3}\,\dot{h} \to -\,2\,G\,\vartheta$ und $P \to M_z$ die von *Bredt* auf anderem Wege gefundene Formel

$$\vartheta = \frac{M_z}{4\,G\,F_m^2} \oint\limits_{R_m} \frac{ds}{\delta(s)} \tag{15}$$

und damit den Torsionswiderstand zu

$$J_t = \frac{4\,F_m^2}{\oint\limits_{R_m} \frac{ds}{\delta(s)}}\,. \tag{16}$$

d) **Hohlquerschnitte mit Zwischenstegen.** Zunächst betrachten wir den einfachen Fall eines symmetrischen, dünnwandigen Kastenquerschnittes mit Zwischensteg (vgl. Abb. 9). Offenbar strömt dann bei dem hydrodynamischen Modellversuch keine Flüssigkeit von Raum I nach Raum II, so daß $p_{\mathrm{I}} = p_{\mathrm{II}}$ ist; d. h. der „Schubfluß" im Sinne des Abschnittes c) ist Null. Daraus folgt aber nicht, daß im Querschnitt des Zwischensteges überhaupt keine Schubspannungen wirken, wie in der einschlägigen Literatur zuweilen behauptet wird. Die Schubspannung ist dort lediglich sehr klein. Wir erkennen mit Hilfe unseres Strömungsgleichnisses das Vorhandensein von Schubspannungen sofort, da bei Abwärtsbewegung des hydrodynamischen Modells der Zwischensteg Flüssigkeit symmetrisch in die Räume I und II verdrängt. Die größte im Zwischensteg auftretende Schubspannung würde dann durch (9) gegeben sein, worin jedoch für M_z nur der Bruchteil des gesamten Torsionsmomentes einzusetzen ist, der von dem Steg übernommen wird. Dieser ist jedoch so klein, daß wir den Anteil des Zwischensteges bei der Ermittlung des Torsionswiderstandes vernachlässigen können, der somit durch (16) hinreichend genau angegeben ist.

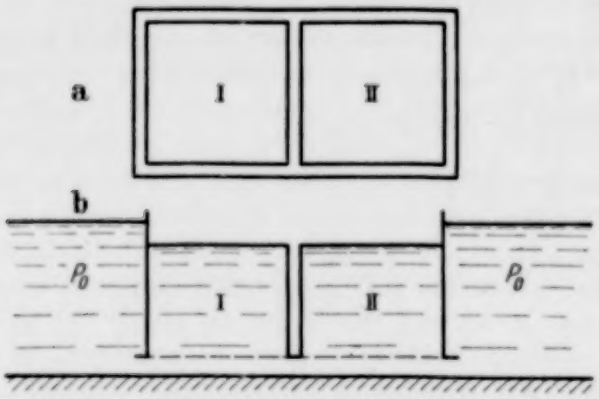

Abb. 9. Symmetrischer Kastenquerschnitt (a) und Modell (b).

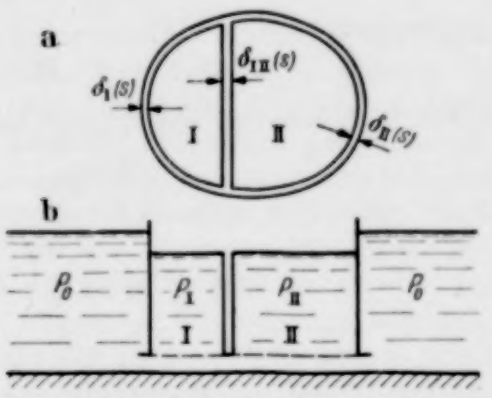

Abb. 10. Unsymmetrischer Hohlquerschnitt (a) und Modell (b).

Beim unsymmetrischen Fall (z. B. Abb. 10) liegen die Verhältnisse verwickelter. Wir wollen uns auch hier auf die Betrachtung des dünnwandigen Falles beschränken, und daher lediglich die Schubspannungen, die am „Schubfluß" beteiligt sind, berücksichtigen. Die Kraft P, die zur Abwärtsbewegung des Modelles mit der Geschwindigkeit $\dot{h}$ aufgebracht werden muß, ist dann praktisch hinreichend genau durch

$$P = (p_{\mathrm{I}} - p_0)\,F_{\mathrm{I}_m} + (p_{\mathrm{II}} - p_0)\,F_{\mathrm{II}_m}$$

gegeben. Da

$$p_{\mathrm{I}} - p_0 = \frac{12\,\mu}{h^3}\,q_{\nu\,\mathrm{I}}\,\delta_{\mathrm{I}} \quad \text{und} \quad p_{\mathrm{II}} - p_0 = \frac{12\,\mu}{h^3}\,q_{\nu\,\mathrm{II}}\,\delta_{\mathrm{II}} \tag{17}$$

ist, ergibt sich

$$P = \frac{12\,\mu}{h^3}\,(q_{\nu\,\mathrm{I}}\,\delta_{\mathrm{I}}\,F_{\mathrm{I}_m} + q_{\nu\,\mathrm{II}}\,\delta_{\mathrm{II}}\,F_{\mathrm{II}_m})\;; \tag{18}$$

ferner folgt

$$(p_{\mathrm{I}} - p_0) - (p_{\mathrm{II}} - p_0) = p_{\mathrm{I}} - p_{\mathrm{II}} = \frac{12\,\mu}{h^3}\,(q_{\nu\,\mathrm{I}}\,\delta_{\mathrm{I}} - q_{\nu\,\mathrm{II}}\,\delta_{\mathrm{II}})\,. \tag{19}$$

Aus Kontinuitätsgründen ist

$$\left.\begin{aligned} F_{\mathrm{I}_m}\dot{h} &= \int q_{\nu\,\mathrm{I}}\,ds + \int q_{\nu\,\mathrm{I\,II}}\,ds = q_{\nu\,\mathrm{I}}\,\delta_{\mathrm{I}}\int\frac{ds}{\delta_{\mathrm{I}}(s)} + q_{\nu\,\mathrm{I\,II}}\,\delta_{\mathrm{I\,II}}\int\frac{ds}{\delta_{\mathrm{I\,II}}(s)}\,,\\ F_{\mathrm{II}_m}\dot{h} &= \int q_{\nu\,\mathrm{II}}\,ds - \int q_{\nu\,\mathrm{I\,II}}\,ds = q_{\nu\,\mathrm{II}}\,\delta_{\mathrm{II}}\int\frac{ds}{\delta_{\mathrm{II}}(s)} - q_{\nu\,\mathrm{I\,II}}\,\delta_{\mathrm{I\,II}}\int\frac{ds}{\delta_{\mathrm{I\,II}}(s)}\,; \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

für $q_{\nu\,\mathrm{I\,II}}$ erhalten wir wegen (1″) die Beziehung

$$\frac{12\,\mu}{h^3}\,q_{\nu\,\mathrm{I\,II}}\,\delta_{\mathrm{I\,II}} = p_{\mathrm{I}} - p_{\mathrm{II}}\,. \tag{21}$$

Im Hinblick auf (19) und (21) ist also

$$q_{\nu\,\mathrm{I\,II}}\,\delta_{\mathrm{I\,II}} = q_{\nu\,\mathrm{I}}\,\delta_{\mathrm{I}} - q_{\nu\,\mathrm{II}}\,\delta_{\mathrm{II}}\,. \tag{22}$$

Die Gleichungen (17) und (21) zeigen, daß wegen der Zuordnung (5): $\frac{6\,\mu}{h^3}\,q_\nu \to \tau_s$ der Schubfluß in den einzelnen Bestandteilen des Querschnittes jeweils konstant ist, also

$$\tau_{\mathrm{I}}\,\delta_{\mathrm{I}} = \text{konst.}, \qquad \tau_{\mathrm{II}}\,\delta_{\mathrm{II}} = \text{konst.} \qquad \text{und} \qquad \tau_{\mathrm{I\,II}}\,\delta_{\mathrm{I\,II}} = \text{konst.}$$

Ferner gilt wegen (22)

$$\tau_{\mathrm{I\,II}}\,\delta_{\mathrm{I\,II}} = \tau_{\mathrm{I}}\,\delta_{\mathrm{I}} - \tau_{\mathrm{II}}\,\delta_{\mathrm{II}}\,. \tag{23}$$

Als Drillmoment liefert (18)

$$M_z = 2\,(\tau_{\mathrm{I}}\,\delta_{\mathrm{I}}\,F_{\mathrm{I}_m} + \tau_{\mathrm{II}}\,\delta_{\mathrm{II}}\,F_{\mathrm{II}_m})\,, \tag{24}$$

und schließlich erhalten wir aus (20) im Hinblick auf die Zuordnung (5):

$$\frac{6\,\mu}{h^3}\,\dot{h} \to -2\,G\,\vartheta \quad \text{und} \quad \frac{6\,\mu}{h^3}\,q_\nu \to \tau_s\,,$$

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= \frac{1}{2\,G\,F_{\mathrm{I}_m}}\left(\tau_{\mathrm{I}}\,\delta_{\mathrm{I}}\int\frac{ds}{\delta_{\mathrm{I}}(s)} + \tau_{\mathrm{I\,II}}\,\delta_{\mathrm{I\,II}}\int\frac{ds}{\delta_{\mathrm{I\,II}}(s)}\right),\\ \text{und}\qquad \vartheta &= \frac{1}{2\,G\,F_{\mathrm{II}_m}}\left(\tau_{\mathrm{II}}\,\delta_{\mathrm{II}}\int\frac{ds}{\delta_{\mathrm{II}}(s)} - \tau_{\mathrm{I\,II}}\,\delta_{\mathrm{I\,II}}\int\frac{ds}{\delta_{\mathrm{I\,II}}(s)}\right). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Die Gleichungen (23) und (25) reichen aus, bei gegebenem Drillmoment den Schubfluß im Querschnitt und den Drillwinkel ϑ zu bestimmen.

4. Zusammenfassung. Die Ausführungen im Abschnitt **3** haben gezeigt, daß das neue Strömungsgleichnis auf anschauliche Weise quantitative Aussagen über das Torsionsverhalten prismatischer Stäbe liefert, die zwar auch durch die Anwendung der Membrananalogie und des *Thomson*schen Strömungsgleichnisses, jedoch in ihrer Gesamtheit nicht durch nur eines der letzteren allein durch einfache anschauliche Analogiebetrachtungen gefunden werden können. So bietet das Seifenhautgleichnis z. B. keine Möglichkeit, die unter **3c)** und **3d)** erörterten Probleme anschaulich zu behandeln.

Im übrigen besteht berechtigte Aussicht, mit Hilfe der vorgelegten hydrodynamischen Analogie das Problem dickwandiger Hohlquerschnitte von beliebiger Querschnittsform experimentell verhältnismäßig einfach zu lösen, eine Aufgabe, deren Bewältigung bei Benutzung der bisher bekannten Analogien erhebliche technische Schwierigkeiten bereitet. Der Verfasser hofft, in Zusammenarbeit mit dem Festigkeitslaboratorium der Technischen Hochschule Hannover (Leiter: Prof. Dr.-Ing. *O. Flachsbart*) noch in diesem Jahre eine geeignete Versuchsapparatur zu erstellen.

(Eingegangen am 26. Juni 1954.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. *E. Pestel*, Hannover, Nienburger Str. 2.

Über Tragflügelsysteme in ebener Strömung bei beliebigen instationären Bewegungen.

Von K. Nickel.

1. Einleitung. Das Problem des instationär bewegten Tragflügels ist schon sehr häufig behandelt worden. Der einfachste Fall der ebenen, inkompressiblen Strömung um den unendlich langen Tragflügel wurde zuerst von *W. Birnbaum* [1] und *H. Wagner* [2] aufgegriffen. Unter gewissen Vernachlässigungen (dünnes, wenig gewölbtes Profil, usw.) führt diese Aufgabe auf die Lösung von zwei Integralgleichungen. Die eine ist eine *Fredholm*sche Integralgleichung erster Art und als Integralgleichung der ebenen Wirbelschicht aus dem stationären Falle wohlbekannt. Die zweite, eine *Volterra*sche Integralgleichung erster Art vom *Sonine*schen Typ, beschreibt den instationären Anteil der Strömung und ist zuerst von *Wagner* [2] aufgestellt worden. Während die Integralgleichung der Wirbelschicht schon 1919 von *A. Betz* [3] aufgelöst werden konnte, gelang die Lösung der *Wagner*schen Integralgleichung in geschlossener Form durch *Hankel*sche Funktionen erst 1936 *H. G. Küssner* [4].

Damit ließen sich geschlossene Formeln für Auftriebsverteilung, Auftrieb und Moment gewinnen in vollkommener Analogie zum stationären Fall (man vgl. *H. G. Küssner* [5] und *H. Söhngen* [6]). Als Nebenergebnis stellte sich dabei noch heraus, daß beim Eintreten des Flügels in eine beliebige, raumfeste Böe die Auftriebsverteilung über die Flügeltiefe proportional zur Auftriebsverteilung der stationär bewegten ebenen Platte wird. Es existiert also zu jedem Zeitpunkt ein Anstellwinkel, für den die stationär angeströmte Platte dieselbe Auftriebsverteilung aufweist, wie der Flügel in der Böe. Damit greift weiterhin der gesamte „Böenauftrieb" im vorderen Neutralpunkt des Flügels an, was auch durch Versuche [7] bestätigt wurde. Dieses Resultat gilt übrigens nicht nur für Böen, sondern ganz allgemein für beliebige „strömungsfeste" Bewegungen, so z. B. (vgl. *H. G. Küssner* [5] S. 356) für die aus der Ruhe heraus mit konstanter Geschwindigkeit und konstantem Anstellwinkel bewegte Platte. Das Wort „strömungsfest" bezieht sich dabei nicht auf die Bahn der Flügelpunkte, sondern auf die örtlichen Normalgeschwindigkeiten am Profil.

Dem Übergang von der ebenen, inkompressiblen Strömung zum dreidimensionalen Fall des endlich langen Tragflügels in kompressibler, instationärer Strömung wurden in letzter Zeit mehrere Arbeiten gewidmet, man beachte insbesondere *H. G. Küssner* [8].

Die folgenden Untersuchungen erweitern die oben geschilderte Theorie der instationären Bewegungen eines Einzelflügels auf Systeme aus beliebig vielen und beliebig angeordneten Flügeln[9], jedoch unter den beiden Einschränkungen der ebenen und inkompressiblen Strömung. Außerdem werde noch, wie in allen zitierten Bearbeitungen, von der Zähigkeit abgesehen. Die Flügelprofile seien dünn, schwach gewölbt und ihre Sehnen annähernd parallel und wenig gegen die Strömung angestellt; weiter verändere sich die Strömungsgeschwindigkeit wenig. Nach der *Birnbaum*schen Theorie der dünnen Profile [1] wird dieses Flügelsystem dann in Ziff. 2 ersetzt durch eine geeignete Verteilung von Wirbeln der Dichte Γ auf den Profilsehnen und von abschwimmenden freien Wirbeln der Dichte ε in ihrer Verlängerung (vgl. Abb. 3). Führt man in Analogie zur Theorie der stationären Bewegung noch gebundene Wirbel der Dichte γ proportional zu den Auftriebsverteilungen über die Profiltiefen ein und ersetzt Γ durch γ, so findet man (Ziff. 3) entsprechend zur Theorie des Einzelflügels aus der physikalischen die folgende mathematische Problemstellung: die γ genügen einem System von *Fredholm*schen Integral-

---

[1] *W. Birnbaum*, Z. angew. Math. Mech. 4 (1924), S. 277.
[2] *H. Wagner*, Z. angew. Math. Mech. 5 (1925), S. 17.
[3] Geschichtliche Angaben dazu findet man bei *L. Schwarz*, Luftfahrtforschung 17 (1940), S. 381.
[4] *H. G. Küssner*, Luftfahrtforschung 13 (1936), S. 410.
[5] *H. G. Küssner*, Luftfahrtforschung 17 (1940), S. 355.
[6] *H. Söhngen*, Luftfahrtforschung 17 (1940), S. 410.
[7] *H. G. Küssner*, Luftfahrtforschung 13 (1936), S. 425. Weiter beachte man die Arbeit von *H. G. Küssner*, Z. Flugwissenschaften 3 (1955) S. 1.
[8] *H. G. Küssner*, Journal of the Aeronautical Sciences 21 (1954), S. 17.
[9] Zwei hintereinanderliegende Flügel betrachtet *J. R. M. Radok*, The Aeronautical Quarterly, III (1952), S. 297, jedoch ohne Berücksichtigung der Rückwirkung des Hinterflügels auf den vorderen.

gleichungen erster Art, dem Gleichungssystem der ebenen Wirbelschichten, und die ε werden durch ein System von *Sonine*schen Integralgleichungen bestimmt. Schon zur Aufstellung des *Sonine*schen Integralgleichungssystems ist allerdings die Kenntnis spezieller Lösungen des *Fredholm*schen Integralgleichungssystems erforderlich. Ohne diese Integralgleichungssysteme aufzulösen, kann man aus dem ersten sofort einen allgemeinen Sachverhalt ablesen, der den oben beschriebenen Böensatz auf Flügelsysteme verallgemeinert und der schon hier ausgesprochen werden soll:

Satz: Für alle strömungsfesten Bewegungen eines beliebigen Flügelsystems der beschriebenen Art gibt es zu jedem Zeitpunkt einen „Satz" von Anstellwinkeln, für den das entsprechende System aus ebenen Platten bei stationärer Bewegung dieselben Auftriebsverteilungen besitzt. Dabei stimmen für jeden Zeitpunkt die Anstellwinkel der einzelnen Platten i. a. nicht überein.

Die exakte Lösung des allgemeinen Integralgleichungssystems der ebenen Wirbelschichten steht noch aus, doch ist sie wenigstens für Sonderfälle bekannt (vgl. *K. Nickel* [1] [2]). Zwei dieser Sonderfälle werden in den Ziffern 4 und 5 herausgegriffen, das System aus endlich vielen Tragflügeln hintereinander und das senkrechte Flügelgitter. In beiden Fällen lassen sich geschlossene Ausdrücke für Auftriebsverteilung, Gesamtauftrieb und Gesamtmoment angeben, ohne daß das zugehörige *Wagner*sche Integralgleichungssystem gelöst zu werden braucht. Für das Flügelgitter sind diese Formeln besonders einfach gebaut und entsprechen vollständig denen für den Einzelflügel, in die sie für unendlich werdende Gitterteilung auch übergehen. Trotzdem das Integralgleichungssystem der Wirbelschichten im allgemeinsten Fall noch nicht gelöst ist, läßt sich dafür doch wenigstens der Weg zur Aufstellung des *Wagner*schen Integralgleichungssystems und seiner Lösung skizzieren (Ziff. 4).

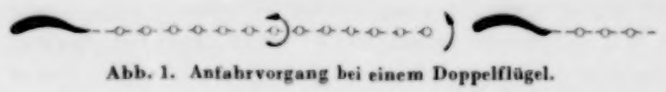

Abb. 1. Anfahrvorgang bei einem Doppelflügel.

Schließlich werde der oben ausgesprochene allgemeine Satz noch etwas näher betrachtet. Für ein einzelnes Flügelprofil ist er offensichtlich mit dem *Küssner*schen Böensatz identisch. Bei mehreren Flügeln überrascht zunächst, daß darin nur von einem stationär bewegten Ersatzsystem aus ebenen Platten, nicht aber vom Angriffspunkt der Luftkräfte gesprochen wird. Da nämlich nach *Küssner* der Einzelflügel in einer Böe durch einen einzelnen tragenden Wirbel im Neutralpunkt ersetzt werden kann, erwartet man zunächst von einem Flügelsystem dasselbe, daß also auch bei ihm für beliebige strömungsfeste Bewegungen der Zusatzauftrieb immer im Neutralpunkt angreift. Daß dies i. a. nicht mehr zutrifft, kann ohne Rechnung an einem Gegenbeispiel nachgewiesen werden:

Abb. 2. Einfluß der endlichen Spannweite bei einem System Tragflügel—Höhensteuer. Der Übersichtlichkeit halber sind die Anfahr- und Randwirbel je durch einen einzigen Wirbel ersetzt.

Es seien zwei gleiche Flügel unendlicher Spannweite in Tandemanordnung gegeben, deren waagrechter Abstand gegenüber den Flügeltiefen sehr groß sein soll. Damit ist die Rückwirkung der beiden Flügel aufeinander auch sehr klein geworden, wenigstens in stationärer Strömung. Betrachtet man jedoch z. B. den Anfahrvorgang, so gerät der Hinterflügel nach einiger Zeit in die Anfahrwirbel des Vorderflügels (vgl. Abb. 1). Während bis dahin beide Flügel annähernd dieselben Anströmverhältnisse und damit in jedem Augenblick auch näherungsweise denselben Auftrieb besaßen, kommt der Hinterflügel nun zunächst in ein Aufwind- und danach Abwindfeld. Da die abschwimmenden Anfahrwirbel in sich die umgekehrte Zirkulation des Vorderflügels vereinigen, ist ihre Wirkung auf den Hinterflügel nicht mehr vernachlässigbar klein. Während also der Gesamtauftrieb im ersten Augenblick des Anfahrens — genau so wie nach sehr langer Zeit — in der Mitte zwischen den beiden Flügeln, also in ihrem Neutralpunkt angreift, kann dies für den in Abb. 1 skizzierten Zeitpunkt nicht der Fall sein. Für allgemeinere Flügelanordnungen gilt offensichtlich dasselbe.

Es gibt manche praktisch vorkommenden Fälle, für die die nachstehend entwickelte Theorie von Interesse ist, so z. B. für instationäre Bewegungen der Flügelsysteme Tragflügel—

[1] *K. Nickel*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 363.
[2] *K. Nickel*, Ing.-Arch. 22 (1954), S. 108 und Ing.-Arch. 23 (1955), S. 102.

Höhenleitwerk, Vorflügel—Hauptflügel—Querruder oder z. B. für die Gittersysteme aus Leit- und Laufrädern von Turbomaschinen. Nur ist bei der Anwendung auf diese Fälle der Einfluß der endlichen Spannweite zu beachten, durch den hinter den Flügeln ein System aus Anfahr- und Randwirbeln zurückbleibt (vgl. Abb. 2 für die Kombination Hauptflügel—Höhenleitwerk). Diese Räumlichkeit, die hier nicht berücksichtigt wird, muß selbstverständlich noch eigens erfaßt werden.

Die folgenden Ausführungen schließen sich in Methode und Bezeichnungsweise eng an die Arbeit von *Söhngen* [1] für den Einzelflügel an. Während jedoch bei *Söhngen* den auftretenden mathematischen Fragen ein sehr breiter Raum gewidmet wird, soll hier der Kürze halber darauf nicht eingegangen werden. Bezüglich der Zulässigkeit der gebrachten Umformungen werde also angenommen, daß die betrachteten Funktionen genügende Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften besitzen mögen. Übrigens bietet hierfür der Übergang von *Söhngens* Betrachtung eines Flügels auf Flügelsysteme keine besonderen Probleme, weil die Vertauschung von Integration und Differentiation, partielle Integration, Vertauschung der Integrationsreihenfolge usw., nur bei der Eigeninduktion eines Flügels auf sich selbst Schwierigkeiten bereitet, nicht aber bei der Wirkung eines Flügels auf einen anderen, und gerade diese Fragen sind ja von *Söhngen* behandelt worden. Bezüglich der eindeutigen Lösbarkeit der aufzustellenden Integralgleichungssysteme jedoch ließen sich, wie schon oben angedeutet wurde, *Söhngens* Existenz- und Einzigkeitsbeweise bisher leider nicht allgemein erweitern.

2. Aufstellung der Grundgleichungen. Die betrachteten dünnen und wenig gewölbten Tragflügelprofile seien in der komplexen z-Ebene annähernd parallel zur reellen Achse angeordnet, und werden von links her mit der annähernd konstanten Geschwindigkeit u_∞ angeströmt (mitbewegtes Koordinatensystem). Die instationäre Bewegung möge zur Zeit $t = 0$ plötzlich beginnen, zur Zeit $t > 0$ habe sich die z-Ebene um die Strecke $s(t)$ seit $t = 0$ verschoben [2]. Flügeldeformationen seien zugelassen, doch seien die Geschwindigkeiten der einzelnen Flügelpunkte in Richtung der imaginären Achse klein gegen u_∞, ferner mögen sich die Flügeltiefen nur unwesentlich ändern. Unter den Vernachlässigungen der Theorie dünner Profile [3] wird dann das ν-te Profil ersetzt durch eine Wirbelbelegung $\Gamma_\nu(z_\nu, s)$ auf der Profil-„sehne". Diese „Sehnen" seien alle parallel zur reellen Achse und mögen die Profile nach Länge und gegenseitiger Lage „möglichst gut" [4] ersetzen (vgl. Abb. 3). Weiter werde angenommen, daß die sich von den Profilhinterkanten $z_\nu = b_\nu$ ablösenden freien Wirbel $\varepsilon_\nu(z_\nu, s)$ in der Verlängerung dieser Profilsehnen liegen und in den Ablösepunkten haften bleiben. Diese Wirbelschleppen sind also alle ebenfalls parallel zur reellen Achse und haben alle die gleiche Länge s. Die eingeführten Wirbel induzieren im Punkte z_μ eine Störungsgeschwindigkeit mit den Komponenten $u_\mu(z_\mu, s)$ und $v_\mu(z_\mu, s)$. Längs der μ-ten Sehne bestimmen sie sich aus der Gleichung

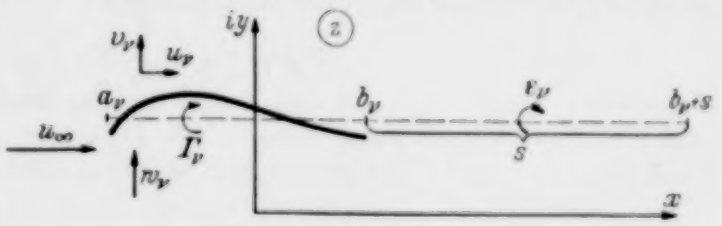

Abb. 3. Ersatzsystem für den ν-ten Flügel.

$$u_\mu(z_\mu, s) - i\, v_\mu(z_\mu, s) = \frac{i}{2\pi} \sum_\nu \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{\Gamma_\nu(\zeta_\nu, s)}{z_\mu - \zeta_\nu}\, d\zeta_\nu + \frac{i}{2\pi} \sum_\nu \int_{b_\nu}^{b_\nu + s} \frac{\varepsilon_\nu(\zeta_\nu, s)}{z_\mu - \zeta_\nu}\, d\zeta_\nu . \tag{1}$$

Hier und im folgenden seien die Summen über alle Flügel zu erstrecken; unter dem Symbol $\oint$ möge der *Cauchy*sche Hauptwert des Integrals verstanden sein.

Gegenüber der großen Anströmgeschwindigkeit u_∞ werden, wie üblich, die Störkomponenten u_μ vernachlässigt. Soll nun das Profilskelett nicht durchströmt werden, so muß

$$v_\mu(z_\mu, s) = - w_\mu(z_\mu, s) \tag{2}$$

gelten, wenn mit $w_\mu(z_\mu, s)$ diejenige Geschwindigkeit bezeichnet sei, mit der die Strömung auf

[1] Siehe Fußnote 6 von Seite 179.

[2] Wegen der Linearität der aufzustellenden Gleichungen kann dazu noch ein stationäres Glied additiv überlagert werden, z. B. eine konstante Profilwölbung. Dieses Glied berechnet sich nach bekannten Gleichungen und kann daher hier weggelassen werden.

[3] Siehe Fußnote 1 von Seite 179.

[4] Dieser Ersatz ist in gewissem Umfange willkürlich und läßt sich im Rahmen der *Birnbaum*schen Theorie nicht genauer bestimmen.

dem Profilpunkt bei z_μ zur Zeit $t(s)$ auftreffen würde, wenn keine Wirbel Γ_ν und ε_ν vorhanden wären. Diese Anströmgeschwindigkeit w_μ setzt sich zusammen aus Beiträgen von den Eigenbewegungen der Flügel, den Deformationen der Profile und den äußeren Störströmungen (z. B. Böen). Nach (1) und (2) genügen also die Funktionen $\Gamma_\nu(z_\nu, s)$ und $\varepsilon_\nu(z_\nu, s)$ den Integralbedingungen

$$w_\mu(z_\mu, s) = \frac{1}{2\pi} \sum_\nu \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \Gamma_\nu(\zeta_\nu, s)\, Re\left\{\frac{1}{z_\mu - \zeta_\nu}\right\} d\zeta_\nu + \frac{1}{2\pi} \sum_\nu \int_{b_\nu}^{b_\nu + s} \varepsilon_\nu(\zeta_\nu, s)\, Re\left\{\frac{1}{z_\mu - \zeta_\nu}\right\} d\zeta_\nu \qquad (3)$$

für $a_\mu \leq z_\mu \leq b_\mu$ und alle $\mu = 1, 2, \ldots$.

Die Forderung nach Erhaltung der Gesamtzirkulation um jeden einzelnen Flügel samt zugehöriger Wirbelschleppe bedeutet

$$\int_{a_\mu}^{b_\mu} \Gamma_\mu(\zeta_\mu, s)\, d\zeta_\mu + \int_{b_\mu}^{b_\mu + s} \varepsilon_\mu(\zeta_\mu, s)\, d\zeta_\mu = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots). \qquad (4)$$

Soll die Strömung an den Profilhinterkanten glatt abfließen, so müssen dort die Funktionen $\Gamma_\mu(z_\mu, s)$ und $\varepsilon_\mu(z_\mu, s)$ stetig ineinander übergehen, es muß also gelten

$$\Gamma_\mu(b_\mu, s) = \varepsilon_\mu(b_\mu, s) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots). \qquad (5)$$

Das vorausgesetzte Haften der freien Wirbel im Ablösepunkt drückt sich aus durch die Forderung

$$\varepsilon_\mu(z_\mu, s) = \varepsilon_\mu(b_\mu, s - z_\mu + b_\mu) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots). \qquad (6)$$

Es wird im folgenden unterstellt, daß das durch die Gleichungen (3), (4), (5) und (6) gekennzeichnete Problem eindeutig lösbar ist, d. h. daß bei bekannten Normalgeschwindigkeiten w_μ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ stets genau ein „Satz" von Wirbelverteilungen Γ_μ und ε_μ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ existiert, der die Gleichungen (3) bis (6) befriedigt. In Sonderfällen (Ziff. 4 und Ziff. 5) könnte dieser Nachweis im Anschluß an *Söhngen* erbracht werden, doch soll hier darauf verzichtet werden. Der allgemeine Fall dagegen steht noch offen.

Zur Bestimmung der Auftriebsverteilung über die Flügeltiefe werde die Dichte $\gamma_\mu(z_\mu, s)$ der gebundenen Wirbel durch die Gleichungen

$$p_\mu(z_\mu, s)_u - p_\mu(z_\mu, s)_o = \varrho\, u_\infty\, \gamma_\mu(z_\mu, s) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots) \qquad (7)$$

eingeführt, worin $p_\mu(z_\mu, s)$ den Druck an der Stelle z_μ des μ-ten Profils je nach dem Index u oder o auf der Unter- oder Oberseite bedeutet. ϱ sei die Dichte des strömenden Mediums. Die Funktionen γ_μ und Γ_μ hängen dann [1] durch die Relation

$$\gamma_\mu(z_\mu, s) = \Gamma_\mu(z_\mu, s) + \frac{\partial}{\partial s} \int_{a_\mu}^{z_\mu} \Gamma_\mu(\zeta_\mu, s)\, d\zeta_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots) \qquad (8)$$

zusammen.

3. Umformungen der Grundgleichungen. Das Ziel der nachfolgenden Umformungen ist die Gewinnung von Gleichungen, in denen die Γ_μ gemäß (8) durch die γ_μ ersetzt sind. Gleichung (3) integriert und durch partielle Integration umgeformt gibt, wenn man (4) beachtet,

$$\begin{aligned}\int_{a_\mu}^{z_\mu} w_\mu(\zeta_\mu, s)\, d\zeta_\mu = {} & \frac{1}{2\pi} \sum_\nu \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \int_{a_\nu}^{\zeta_\nu} \Gamma_\nu(\eta_\nu, s)\, d\eta_\nu\, Re\left\{\frac{1}{z_\mu - \zeta_\nu}\right\} d\zeta_\nu + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_\nu \int_{b_\nu}^{b_\nu + s} \int_{b_\nu + s}^{\zeta_\nu} \varepsilon_\nu(\eta_\nu, s)\, d\eta_\nu\, Re\left\{\frac{1}{z_\mu - \zeta_\nu}\right\} d\zeta_\nu - \frac{1}{2\pi} \sum_\nu \int_{a_\nu}^{b_\nu} \Gamma_\nu(\zeta_\nu, s)\, Re\left\{\log(a_\mu - \zeta_\nu)\right\} d\zeta_\nu - \\ & - \frac{1}{2\pi} \sum_\nu \int_{b_\nu}^{b_\nu + s} \varepsilon_\nu(\zeta_\nu, s)\, Re\left\{\log(a_\mu - \zeta_\nu)\right\} d\zeta_\nu .\end{aligned}$$

[1] Man vgl. etwa *H. Söhngen* (Fußnote 6 von Seite 179), doch ist zu beachten, daß *Söhngen* entgegengesetzt zur hier gebrachten Darstellung eine Anströmung aus Richtung der p o s i t i v e n reellen Achse annimmt.

(Um eine eindeutige Funktion Logarithmus zu erhalten, denkt man sich für jeden Flügel die z-Ebene von b_ν nach ∞ so aufgeschnitten, daß dieser Schnitt keine andere Profilsehne schneidet. Für die praktisch interessierenden Flügelsysteme ist das immer möglich. Damit ist zwar der Logarithmus für jeden Flügel anders erklärt, doch beeinträchtigt das die weiteren Überlegungen nicht.)

Durch Differentation nach s findet man daraus mit (6)

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_{a_\mu}^{z_\mu} w_\mu(\zeta_\mu, s)\, d\zeta_\mu = \frac{1}{2\pi}\sum_\nu \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{\partial}{\partial s}\int_{a_\nu}^{\zeta_\nu} \Gamma_\nu(\eta_\nu, s)\, d\eta_\nu\, Re\left\{\frac{1}{z_\mu - \zeta_\nu}\right\} d\zeta_\nu -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\sum_\nu \int_{b_\nu}^{b_\nu + s} \varepsilon_\nu(\zeta_\nu, s)\, Re\left\{\frac{1}{z_\mu - \zeta_\nu}\right\} d\zeta_\nu - g_\mu(s) \tag{9}$$

mit

$$g_\mu(s) = \frac{1}{2\pi}\sum_\nu \frac{\partial}{\partial s}\int_{a_\nu}^{b_\nu} \Gamma_\nu(\zeta_\nu, s)\, Re\,\{\log(a_\mu - \zeta_\nu)\}\, d\zeta_\nu +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\sum_\nu \frac{\partial}{\partial s}\int_{b_\nu}^{b_\nu + s} \varepsilon_\nu(\zeta_\nu, s)\, Re\,\{\log(a_\mu - \zeta_\nu)\}\, d\zeta_\nu .$$

Addiert man (3) und (9), so lassen sich schließlich nach (8) daraus die Funktionen Γ_μ eliminieren und man kommt auf das *Fredholm*sche Integralgleichungssystem erster Art

$$\frac{1}{2\pi}\sum_\nu \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \gamma_\nu(\zeta_\nu, s)\, Re\left\{\frac{1}{z_\mu - \zeta_\nu}\right\} d\zeta_\nu = H_\mu(z_\mu, s) + g_\mu(s) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

mit

$$H_\mu(z_\mu, s) = w_\mu(z_\mu, s) + \frac{\partial}{\partial s}\int_{a_\mu}^{z_\mu} w_\mu(\zeta_\mu, s)\, d\zeta_\mu .$$

Dies ist das wohlbekannte Integralgleichungssystem der dünnen Profile bei stationärer Strömung, wenn man für den Augenblick s als einen Parameter ansieht. Die Lösung von (10) ist wie dort zu bestimmen unter der Forderung glatten Abflusses an den Profilhinterkanten, nach (5), (4) und (8) muß also gelten

$$\gamma_\mu(b_\mu, s) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots) . \tag{11}$$

Für den speziellen Fall der strömungsfesten Bewegung gilt

$$\frac{\partial}{\partial z_\mu} w_\mu(z_\mu, s) + \frac{\partial}{\partial s} w_\mu(z_\mu, s) = 0$$

und also auch

$$H_\mu(z_\mu, s) = h_\mu(s) . \tag{12}$$

Damit genügt also die Dichte $\gamma_\mu(z_\mu, s)$ der gebundenen Wirbel bei strömungsfester Bewegung dem Integralgleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\sum_\nu \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \gamma_\nu(\zeta_\nu, s)\, Re\left\{\frac{1}{z_\mu - \zeta_\nu}\right\} d\zeta_\nu = f_\mu(s) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots) \\ \left(f_\mu(s) = g_\mu(s) + h_\mu(s)\right) \end{aligned}\right\} \tag{10a}$$

und dies ist für jedes s gerade das Integralgleichungssystem für ein System aus ebenen Platten mit den Anstellwinkeln

$$\alpha_\mu(s) = \frac{1}{u_\infty} f_\mu(s) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots) . \tag{13}$$

Damit ist der in der Einleitung (Ziff. 1) formulierte Satz vollständig bewiesen.

4. n Profile hintereinander. In diesem Sonderfall sind von selbst alle Strömungskomponenten $u_\mu \equiv 0$, man kann also in Gleichung (3) den Operator $Re\,\{\cdots\}$ weglassen. Weiter kann noch ohne Einschränkung z_μ durch x_μ ersetzt werden. Damit geht (10) über in

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\oint_{a_\nu}^{b_\nu}\frac{\gamma_\nu(\xi_\nu, s)}{x_\mu - \xi_\nu}\,d\xi_\nu = H_\mu(x_\mu, s) + g_\mu(s) \qquad (\mu = 1, \ldots, n)\,. \tag{10b}$$

Die Auflösung $\gamma_\nu(\xi_\nu, s)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ von (10b) unter der *Joukowski*bedingung (11) lautet (vgl. *K. Nickel*[1])

$$\gamma_\nu(\xi_\nu, s) = \frac{2}{\pi}\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n}\frac{b_\varkappa - \xi_\nu}{a_\varkappa - \xi_\nu}}\sum_{\mu=1}^{n}\oint_{a_\mu}^{b_\mu}\frac{H_\mu(x_\mu, s) + g_\mu(s)}{x_\mu - \xi_\nu}\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{a_\lambda - x_\mu}{b_\lambda - x_\mu}}\,dx_\mu \quad (\nu = 1, \ldots, n)\,. \tag{14}$$

Der gesamte Auftrieb aller n Flügel berechnet sich zu

$$A(s) \equiv \varrho\, u_\infty \sum_{\nu=1}^{n}\int_{a_\nu}^{b_\nu}\gamma_\nu(\xi_\nu, s)\,d\xi_\nu = 2\,\varrho\, u_\infty \sum_{\mu=1}^{n}\int_{a_\mu}^{b_\mu}[H_\mu(x_\mu, s) + g_\mu(s)]\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{a_\lambda - x_\mu}{b_\lambda - x_\mu}}\,dx_\mu\,, \tag{15}$$

und das Moment um den Nullpunkt lautet

$$M(s) \equiv \varrho\, u_\infty \sum_{\nu=1}^{n}\int_{a_\nu}^{b_\nu}\gamma_\nu(\xi_\nu, s)\,\xi_\nu\,d\xi_\nu =$$

$$= 2\,\varrho\, u_\infty \sum_{\mu=1}^{n}\int_{a_\mu}^{b_\mu}[H_\mu(x_\mu, s) + g_\mu(s)]\left[x_\mu - \frac{1}{2}\sum_{\varrho=1}^{n}(b_\varrho - a_\varrho)\right]\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{a_\lambda - x_\mu}{b_\lambda - x_\mu}}\,dx_\mu\,. \tag{16}$$

In (14), (15) und (16) sind einstweilen noch die Funktionen $g_\mu(s)$ unbekannt. Zu ihrer Bestimmung multipliziert man Gleichung (9) mit den Funktionen

$$\bar{\gamma}_\mu^{\varrho}(x_\mu) = \frac{(-1)^\mu\, x_\mu^{\varrho-1}}{\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}(b_\lambda - x_\mu)(a_\lambda - x_\mu)}} \qquad (\mu, \varrho = 1, \ldots, n)\,, \tag{17}$$

integriert über $\langle a_\mu, b_\mu \rangle$ und summiert noch über alle $\mu = 1, \ldots, n$. Wegen der Eigenschaft [2]

$$\sum_{\mu=1}^{n}\oint_{a_\mu}^{b_\mu}\frac{\bar{\gamma}_\mu^{\varrho}(x_\mu)}{x_\mu - \xi_\nu}\,dx_\mu = 0 \quad \text{für} \quad a_\nu \leqq \xi_\nu \leqq b_\nu \qquad (\nu, \varrho = 1, \ldots, n) \tag{18}$$

verschwinden dann die Glieder mit den Γ_ν und man findet

$$2\sum_{\mu=1}^{n} g_\mu(s)\int_{a_\mu}^{b_\mu}\bar{\gamma}_\mu^{\varrho}(x_\mu)\,dx_\mu = -\,2\sum_{\mu=1}^{n}(-1)^\mu\int_{a_\mu}^{b_\mu}\bar{\gamma}_\mu^{\varrho}(x_\mu)\,\frac{\partial}{\partial s}\int_{a_\mu}^{x_\mu} w_\mu(\xi_\mu, s)\,d\xi_\mu\,dx_\mu +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\int_{b_\nu}^{b_\nu + s}\varepsilon_\nu(\xi_\nu, s)\,A_\varrho(\xi_\nu)\,d\xi_\nu \tag{19}$$

$$\text{mit}\quad A_\varrho(\xi_\nu) = \frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{n}\oint_{a_\mu}^{b_\mu}\frac{\bar{\gamma}_\mu^{\varrho}(x_\mu)}{x_\mu - \xi_\nu}\,dx_\mu = \begin{cases} 0 & \text{falls } \xi_\nu \\ \dfrac{-\,\xi_\nu^{\varrho}\prod_{\varkappa=1}^{n}\operatorname{sign}(b_\varkappa - \xi_\nu)}{\sqrt{\prod_{\lambda=1}^{n}(b_\lambda - \xi_\nu)(a_\lambda - \xi_\nu)}} & \text{falls } \xi_\nu \text{ nicht} \end{cases} \left.\begin{array}{c}\\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{auf einer der}\\ \text{Strecken}\\ \langle a_\lambda, b_\lambda \rangle\\ (\lambda = 1, \ldots, n)\\ \text{liegt.}\end{array} \tag{20}$$

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 180.
[2] Vgl. *K. Nickel*, Math. Z. 54 (1951), S. 91, Formel (20).

In (19) hat man ein lineares, unhomogenes Gleichungssystem zur Berechnung der Funktionen $g_\mu(s)$ $(\mu = 1, \ldots, n)$ gefunden. Da die zugehörige Determinante nicht verschwindet (vgl. *K. Nickel* [1], Seite 374/375) ist dieses System stets eindeutig auflösbar. Damit können die $g_\mu(s)$ als bekannte Funktionen angesehen werden, die nur noch von den Wirbelstärken ε_ν der Anfahrwirbel abhängen.

Zur Bestimmung der $\varepsilon_\nu(\xi_\nu, s)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ geht man auf die Gleichung (3) zurück. Multipliziert man sie mit den Wirbelverteilungen

$$\bar{\gamma}^{\varrho}_{\mu}(x_\mu) = \frac{2}{\pi}\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n}\frac{a_\varkappa - x_\mu}{b_\varkappa - x_\mu}}\oint_{a_\varrho}^{b_\varrho}\frac{1}{x_\mu - \xi_\varrho}\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{b_\lambda - \xi_\varrho}{a_\lambda - \xi_\varrho}}\,d\xi_\varrho\,, \qquad (\mu, \varrho = 1, \ldots, n)\,, \qquad (21)$$

integriert über $\langle a_\mu, b_\mu \rangle$ und summiert noch von $\mu = 1$ bis n, so ergibt sich nach einigen Umformungen wegen

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{\mu=1}^{n}{}'\oint_{a_\mu}^{b_\mu}\frac{\bar{\gamma}^{\varrho}_{\mu}(x_\mu)}{x_\mu - \xi_\nu}\,dx_\mu = e_{\varrho\nu} = \begin{cases} 1 \text{ für } \varrho = \nu \\ 0 \text{ für } \varrho \neq \nu \end{cases} \qquad (22)$$

unter Beachtung der Gleichungen (4) und (6) das Gleichungssystem

$$\int_0^s \varepsilon_\varrho(b_\varrho, \sigma)\,d\sigma + \int_0^s \sum_{\nu=1}^{n}\varepsilon_\nu(b_\nu, \sigma)\sqrt{\prod_{\varkappa=1}^{n}\frac{a_\varkappa - b_\nu + \sigma - s}{b_\varkappa - b_\nu + \sigma - s}}\,B_\varrho(s - \sigma + b_\nu)\,d\sigma$$

$$= -2\sum_{\mu=1}^{n}\int_{a_\mu}^{b_\mu} w_\mu(x_\mu, s)\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n}\frac{a_\varkappa - x_\mu}{b_\varkappa - x_\mu}}\,B_\varrho(x_\mu)\,dx_\mu \quad (\varrho = 1, \ldots, n)\,. \qquad (23)$$

Dabei wurde zur Abkürzung gesetzt

$$B_\varrho(z) = \frac{1}{\pi}\oint_{a_\varrho}^{b_\varrho}\frac{1}{z - \xi_\varrho}\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{b_\lambda - \xi_\varrho}{a_\lambda - \xi_\varrho}}\,d\xi_\varrho\,. \qquad (24)$$

In (23) hat man ein *Sonine*sches Integralgleichungssystem zur Bestimmung der ε_ν gefunden. Bekanntlich besitzt nun die *Sonine*sche Integralgleichung

$$\int_0^s f(\sigma)\,K(\sigma - s)\,d\sigma = g(s) \qquad (25)$$

die Lösung [2]

$$f(\sigma) = g(0)\,L(\sigma) + \int_0^\sigma L(\sigma - s)\,dg(s)\,, \qquad (26)$$

wobei der lösende Kern $L(\sigma)$ die spezielle Lösung von (25) für $g(s) \equiv 1$ ist [3]. Damit wird folgende Methode zur Auflösung von (23) nahegelegt: Man betrachtet von den n gesuchten Funktionen ε_ϱ die ersten $n - 1$ für den Augenblick als bekannt und löst (23) nach (24) und (25) für $\varrho = n$ auf. Die Lösung ε_n, die natürlich noch von den ε_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, n - 1)$ abhängen wird, setzt man in die $n - 1$ restlichen Gleichungen (23) ein. Wie man sich leicht überzeugt, ist dieses neue Integralgleichungssystem immer noch vom *Sonine*schen Typ, kann also ebenso weiterbehandelt werden. Nach $n - 1$ Schritten ist man auf einer einzigen *Sonine*schen Integralgleichung, etwa für ε_1, angelangt, die man nach (26) löst. Die anderen gesuchten Funktionen ε_2 bis ε_n bestimmt man genau so. Zwar kommt man dabei auf sehr unhandliche Ausdrücke, doch treten keine prinzipiellen Schwierigkeiten auf. Ob allerdings (23) stets und eindeutig lösbar ist, ist damit noch nicht gezeigt.

Dem Gleichungssystem (23) entspricht im Falle $n = 1$ die *Wagner*sche Integralgleichung. Dieser Zusammenhang läßt sich noch etwas deutlicher zeigen. Beachtet man nämlich, daß die

---

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 180.

[2] Das Integral ist als *Stieltjes*-Integral, aufzufassen.

[3] Vgl. etwa *W. Schmeidler*, Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik I. S. 216 ff. Leipzig 1950.

B_ϱ die Eigenschaft

$$\sum_{\varrho=1}^{n} B_\varrho(z) = 1 - \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{falls } z \\ \sqrt{\prod_{\varkappa=1}^{n} \frac{b_\varkappa - z}{a_\varkappa - z}} & \begin{array}{c}\text{falls } z \\ \text{nicht}\end{array} \end{array} \right\} \begin{array}{c}\text{auf einer der Strecken} \\ \langle a_\lambda, b_\lambda \rangle \\ (\lambda = 1, \ldots, n) \quad \text{liegt}\end{array} \tag{27}$$

besitzen [1], so findet man aus (23) durch Aufsummieren über alle $\varrho = 1, \ldots, n$ die eine Gleichung

$$\int_0^s \sum_{\mu=1}^{n} \varepsilon_\mu(b_\mu, \sigma) \sqrt{\prod_{\varkappa=1}^{n} \frac{a_\varkappa - b_\mu + \sigma - s}{b_\varkappa - b_\mu + \sigma - s}}\, d\sigma + 2 \sum_{\mu=1}^{n} \int_{a_\mu}^{b_\mu} w_\mu(x_\mu, s) \sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n} \frac{a_\varkappa - x_\mu}{b_\varkappa - x_\mu}}\, dx_\mu = 0, \tag{23a}$$

die vollkommen der *Wagner*schen Integralgleichung entspricht. Nur sind für $n > 1$ die Funktionen ε_μ durch diese eine Gleichung (23a) sicher nicht mehr eindeutig bestimmt, dazu ist vielmehr das allgemeine Gleichungssystem (23) erforderlich.

Im allgemeinen Falle, wenn also die Flügelprofile nicht mehr alle hintereinander angeordnet sind und ihre Anzahl u. U. nicht mehr endlich ist, kann man zur Bestimmung der Funktionen $g_\mu(s)$ und $\varepsilon_\mu(\zeta_\mu, s)$ genau so verfahren. Man multipliziert (10) mit Funktionen $\bar{\gamma}_\mu^\varrho(z_\mu)$ der Eigenschaft

$$\sum_\mu \oint_{a_\mu}^{b_\mu} \bar{\gamma}_\mu^\varrho(z_\mu)\, Re\left\{\frac{1}{z_\mu - \zeta_\nu}\right\} dz_\mu = 0 \qquad (\varrho, \nu = 1, 2, \ldots) \tag{18a}$$

integriert über $\langle a_\mu, b_\mu \rangle$ und summiert über alle μ. Damit kommt man auf ein lineares Gleichungssystem für die g_μ in Abhängigkeit von den ε_μ. Zu deren Berechnung sucht man weitere Zirkulationen $\bar{\bar{\gamma}}_\mu^\varrho(z_\mu)$, die diesmal dem Gleichungssystem

$$\frac{1}{2\pi} \sum_\mu \oint_{a_\mu}^{b_\mu} \bar{\bar{\gamma}}_\mu^\varrho(z_\mu)\, Re\left\{\frac{1}{z_\mu - \zeta_\nu}\right\} dz_\mu = e_{\varrho\nu} \qquad (\varrho, \nu = 1, 2, \ldots) \tag{22a}$$

genügen sollen. Die obige Operation auf (3) angewandt liefert dann ein *Sonine*sches Integralgleichungssystem zur Berechnung der Wirbeldichten $\varepsilon_\mu(\zeta_\mu, s)$.

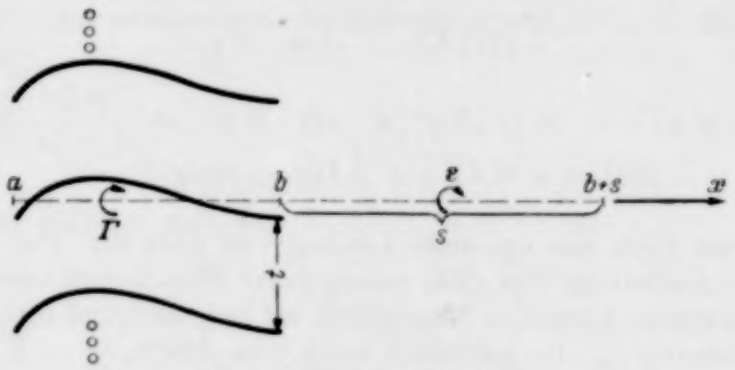

Abb. 4. Senkrechtes Flügelgitter.

5. Senkrechtes Flügelgitter. Als weiteres Beispiel werde das senkrechte Flügelgitter gemäß Abb. 4 behandelt. Mit der Bezeichnung $k = \pi/t$ (t = Gitterteilung nach Abb. 4) geht (3) über in

$$w(x, s) = \frac{k}{2\pi} \oint_a^b \Gamma(\xi, s)\, \mathfrak{Ctg}\, k(x - \xi)\, d\xi + \frac{k}{2\pi} \int_b^{b+s} \varepsilon(\xi, s)\, \mathfrak{Ctg}\, k(x - \xi)\, d\xi\,. \tag{3a}$$

Der Kürze halber sollen die Umformungen entsprechend zu den Ziffern 3 und 4 übergangen und sofort das Ergebnis angeschrieben werden.

[1] *K. Nickel*, a. a. O. (Fußnote 2 von Seite 184), Seite 90.

Die Auftriebsverteilung $\gamma(\xi, s)$ über die Profiltiefe lautet

$$\gamma(\xi, s) = \frac{a(s)}{\pi}\sqrt{\frac{\mathfrak{Sin}\, k(b-\xi)}{\mathfrak{Sin}\, k(\xi-a)}} + \\ + \frac{2k}{\pi}\sqrt{\mathfrak{Sin}\, k(b-\xi)\,\mathfrak{Sin}\, k(\xi-a)}\oint_a^b \frac{w(x,s) + \frac{\partial}{\partial s}\int_a^x w(\eta, s)\, d\eta}{\mathfrak{Sin}\, k(x-\xi)\sqrt{\mathfrak{Sin}\, k(b-x)\,\mathfrak{Sin}\, k(x-a)}}\, dx \qquad (28)$$

mit

$$a(s) = \frac{2k}{\mathfrak{Sin}\, k(b-a)}\left[2\,\mathfrak{Sin}\, k\frac{b-a}{2}\int_a^b w(x, s)\frac{\mathfrak{Cof}\, k\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{\sqrt{\mathfrak{Sin}\, k(b-x)\,\mathfrak{Sin}\, k(x-a)}}\, dx - \right. \\ \left. - \Gamma_0(s) + \Gamma_0(0)\, k_1(s) + \int_0^s k_1(s-\sigma)\, d\Gamma_0(\sigma)\right], \qquad (29)$$

wobei der letzte Summand als *Stieltjes*-Integral aufzufassen ist.

Dabei ist

$$\Gamma_0(s) = 2\int_a^b w(x, s)\sqrt{\frac{\mathfrak{Sin}\, k(x-a)}{\mathfrak{Sin}\, k(b-x)}}\, dx \qquad (30)$$

und

$$k_1(s) = 1 + \mathfrak{Sin}\, k\frac{b-a}{2}\int_0^s \varepsilon_1(b, \sigma)\frac{\mathfrak{Cof}\, k\left(s-\sigma+\frac{b-a}{2}\right)}{\sqrt{\mathfrak{Sin}\, k(s-\varrho)\,\mathfrak{Sin}\, k(s-\varrho+b-a)}}\, d\sigma, \qquad (31)$$

wobei $\varepsilon_1(b, \sigma)$ die spezielle Lösung der *Wagner*schen Integralgleichung

$$\int_0^s \varepsilon(b, \sigma)\sqrt{\frac{\mathfrak{Sin}\, k(s-\sigma+b-a)}{\mathfrak{Sin}\, k(s-\sigma)}}\, d\sigma + \Gamma_0(s) = 0 \qquad (32)$$

für $\Gamma_0(s) \equiv 1$ ist.

Der Auftrieb eines Gitterprofils berechnet sich zu

$$A(s) \equiv \varrho\, u_\infty \int_a^b \gamma(\xi, s)\, d\xi = \varrho\, u_\infty \frac{a(s)}{k}\,\mathfrak{Sin}\, k\frac{b-a}{2} + \\ + 2\,\varrho\, u_\infty \int_a^b \left[w(x, s) + \frac{\partial}{\partial s}\int_a^x w(\eta, s)\, d\eta\right]\frac{\mathfrak{Sin}\, k\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{\sqrt{\mathfrak{Sin}\, k(b-x)\,\mathfrak{Sin}\, k(x-a)}}\, dx, \qquad (33)$$

und das Längsmoment um den Nullpunkt wird

$$M(s) \equiv \varrho\, u_\infty \int_a^b \gamma(\xi, s)\,\xi\, d\xi = \varrho\, u_\infty \frac{a(s)}{k}\left[\frac{a+b}{2}\,\mathfrak{Sin}\, k\frac{b-a}{2} - \frac{1}{k}\,\mathfrak{Cof}\, k\frac{b-a}{2}\log \mathfrak{Cof}\, k\frac{b-a}{2}\right] + \\ + \frac{2\,\varrho\, u_\infty}{k}\int_a^b \left[w(x, s) + \frac{\partial}{\partial s}\int_a^x w(\eta, s)\, d\eta\right]\left[\frac{\mathfrak{Cof}\, k\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\log \mathfrak{Cof}\, k\frac{b-a}{2} + k\frac{a+b}{2}\,\mathfrak{Sin}\, k\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{\sqrt{\mathfrak{Sin}\, k(b-x)\,\mathfrak{Sin}\, k(x-a)}}\right. \\ \left. - \operatorname{Arc\,cos}\frac{\mathfrak{Cof}\, k\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{\mathfrak{Cof}\, k\frac{b-a}{2}}\right] dx, \qquad (34)$$

wobei mit Arc cos der Hauptwert bezeichnet werde.

Diese Formeln entsprechen vollkommen denen für den Einzelflügel und gehen für $k \to 0$, also unendlich werdende Gitterteilung, auch in diese über [1]. Da für strömungsfeste Bewegungen der zweite Summand in (28) verschwindet, erkennt man hier ohne Rechnung die Gültigkeit des in der Einleitung formulierten Satzes. Überdies greift dann noch, wie beim Einzelflügel, nach (33) und (34) der Auftrieb eines Profils aus dem Gitterverband stets im vorderen Neutralpunkt an.

[1] Vgl. *H. Söhngen* (Fußnote 6 von Seite 179), doch beachte man Fußnote 1 von Seite 182.

Für den Anfahrvorgang des senkrechten Plattengitters, wenn also das Gitter aus der Ruhe heraus unter dem konstanten Anstellwinkel α mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit u_∞ bewegt wird, vereinfachen sich mit

$$w(x, s) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad s < 0 \\ u_\infty \sin\alpha & \text{für} \quad s \geqq 0 \end{cases}$$

die obigen Formeln zu

$$\Gamma_0(s) = 2\pi u_\infty \sin\alpha \frac{1}{k} \operatorname{Sin} k \frac{b-a}{2},$$

$$a(s) = 2\pi u_\infty \sin\alpha \frac{k_1(s)}{\operatorname{Cof} k \frac{b-a}{2}},$$

Auftriebsverteilung $$\gamma(\xi, s) = 2 u_\infty \sin\alpha \frac{k_1(s)}{\operatorname{Cof} k \frac{b-a}{2}} \sqrt{\frac{\operatorname{Sin} k(b-\xi)}{\operatorname{Sin} k(\xi-a)}},$$

Auftrieb $$A(s) = 2\pi \varrho u_\infty^2 \sin\alpha\, k_1(s) \frac{1}{k} \operatorname{Tg} k \frac{b-a}{2}$$

und die Lage des Auftriebsmittelpunktes (gleichzeitig die Abszisse des Neutralpunkts)

$$\frac{M}{A}(s) = \frac{a+b}{2} - \frac{1}{k} \operatorname{Ctg} k \frac{b-a}{2} \log \operatorname{Cof} k \frac{b-a}{2}.$$

Auftriebsverteilung $\gamma(\xi, s)$ und Auftrieb $A(s)$ einer Gitterschaufel gehen also beim Anfahrvorgang durch Multiplikation mit dem „Abminderungsfaktor" $k_1(s)$ aus den stationären Werten hervor.

(Eingegangen am 7. Juli 1954.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Karl Nickel*, Instituto Aerotecnico, Córdoba, Argentinien.

Drehschwingungen in Kreuzgelenkwellen.

Von F. Weidenhammer.

1. Aufgabenstellung. Mit Hilfe eines Kreuzgelenkes (Kardangelenkes) kann man Drehmomente über abgewinkelte Wellen weiterleiten, wovon z. B. der Kraftfahrzeugbau bei seinen Konstruktionen häufigen Gebrauch macht. Allerdings muß man bei Verwendung nur eines Kreuzgelenkes in Kauf nehmen, daß in der abgewinkelten Abtriebswelle eine periodisch schwankende Drehgeschwindigkeit (Winkelgeschwindigkeit) und damit ein ebenfalls schwankendes Moment entsteht, selbst wenn der Antrieb mit konstanter Drehzahl bei konstantem Moment erfolgt. Um diese Schwankungen in tragbaren Grenzen zu halten, beschränkt man sich in der technischen Praxis auf kleine Ablenkwinkel $\chi \leqq 20°$. Trotzdem besteht wegen dieser periodischen Schwankungen die Gefahr der Anregung von Drehschwingungen in besonderem Maße, worauf bereits *H. Dietz* [1] hingewiesen hat. Im Folgenden soll daher das Drehschwingungsproblem für eine Welle mit einem Kreuzgelenk allgemein behandelt werden. Wie *H. Dietz* [1] ebenfalls gezeigt hat, sind die Wellen auch periodischen Beanspruchungen durch Biegemomente unterworfen. Es werde jedoch eine solche Lagerung der Welle vorausgesetzt, daß Biegeschwingungen merklicher Amplitude nicht erregt werden und im weiteren außer Ansatz bleiben können.

2. Die Schwingungsgleichungen. Wie bei Drehschwingungsrechnungen bewährt, werden die Wellenstücke als torsionsfähig, aber masselos angesehen und nur die Drehmassen J_0 und J_1 an den Wellenenden berücksichtigt. Ferner sei auch die Masse des Kreuzgelenkes selber vernachlässigbar klein gegen die Drehmassen J_0 und J_1 (Abb. 1). Durch eine kinematische

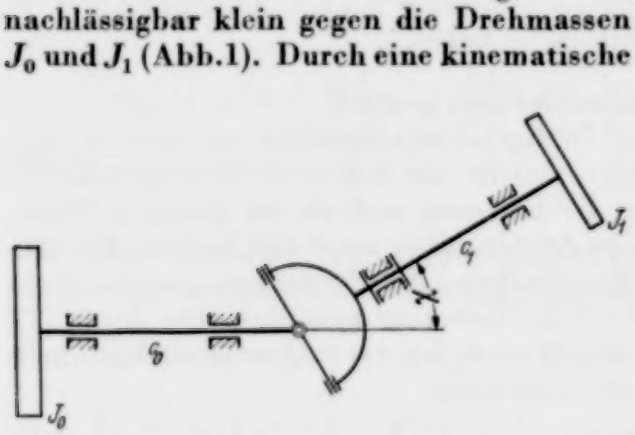

Abb. 1. Die Kreuzgelenkwelle, gezeichnet für ein Gelenk mit Querverschieblichkeit und statisch bestimmter Lagerung der Welle.

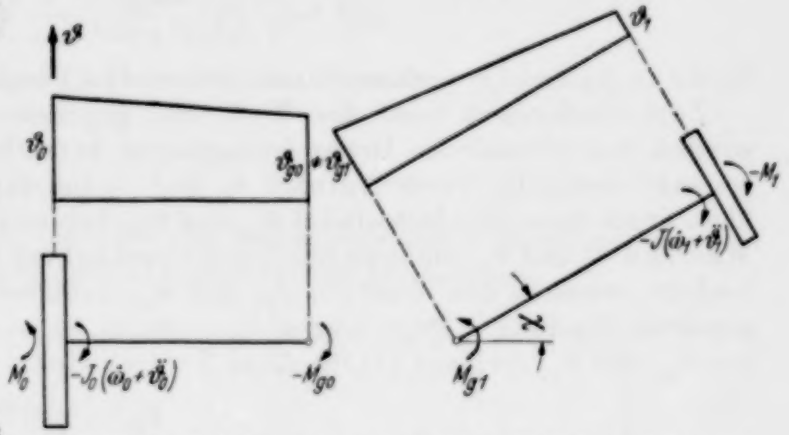

Abb. 2. Die elastische Verdrehung der Welle und die Momentbelastung der Wellenstücke. M_{gi} steht für $\overline{M}_{gi}$ bzw. $\tilde{M}_{gi}$ $(i = 0,1)$.

Betrachtung der Übertragungsverhältnisse am Kreuzgelenk findet man [2] für die Drehgeschwindigkeit $\omega_1(t)$ auf der Abtriebsseite abhängig von der Drehgeschwindigkeit $\omega_0(t)$ und dem Drehwinkel $\varphi_0(t)$ auf der Antriebsseite (gerechnet von der Schnittgeraden der beiden Ebenen aus, in denen sich die Gabelzapfen drehen):

$$\omega_1 = \frac{\cos\chi}{1-\sin^2\chi\sin^2\varphi_0}\,\omega_0, \quad (0 \leqq \chi < 90°). \tag{1}$$

Zur Betrachtung des Drehgleichgewichtes bei stationärem Betrieb der Welle ohne Schwingungen werden außer den durchgeleiteten Arbeitsmomenten M_0 und M_1 noch die beiderseits des Kreuzgelenkes angreifenden Momente $\overline{M}_{g0}$ und $\overline{M}_{g1}$ eingeführt (Abb. 2). Dabei kennzeichnet ein Querstrich bei den Kreuzgelenkmomenten den stationären Zustand ohne Schwingungen. Da die Lastmomente M_0 und M_1 nur für den stationären Betrieb berechnet werden und später als nicht wesentlich durch Schwingungen geändert mit den gleichen Werten in die Schwingungsgleichungen übernommen werden, erübrigt sich hier eine solche Kennzeichnung.

---

[1] *H. Dietz*, Z. VDI. 82 (1938), S. 825.
[2] *O. Kraemer*, Getriebelehre, S. 199, Karlsruhe 1950.

Aus Abb. 2 liest man als Bedingungen für Drehgleichgewicht ohne Schwingungen ab:

$$\left.\begin{aligned} M_0 - J_0\,\dot{\omega}_0 - \overline{M}_{g0} &= 0\,, \\ \overline{M}_{g1} - J_1\,\dot{\omega}_1 - M_1 &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Auf Grund des Arbeitssatzes und der kinematischen Grundgleichung (1) gilt für die Gelenkmomente $\overline{M}_{g0}$ und $\overline{M}_{g1}$:

$$\frac{\overline{M}_{g0}}{\overline{M}_{g1}} = \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{\cos\chi}{1 - \sin^2\chi\sin^2\varphi_0}\,, \tag{3}$$

so daß also ein eingeleitetes konstantes Moment $\overline{M}_{g0}$ als ein periodisch schwankendes Moment $\overline{M}_{g1}$ in die Abtriebswelle weitergeleitet wird. Aus den Gleichgewichtsbedingungen (2) und der Übertragungsgleichung (3) folgt dann für die durchgeleiteten Arbeitsmomente M_0 und M_1 die Beziehung

$$\frac{M_0 - J_0\,\dot{\omega}_0}{M_1 + J_1\,\dot{\omega}_1} = \frac{\cos\chi}{1 - \sin^2\chi\sin^2\varphi_0}\,.$$

Daraus erkennt man, daß die Welle bei stationärem Betrieb mit gleichförmiger Drehung auf der Antriebsseite

$$\dot{\omega}_0 = 0\,, \quad \omega_0 = \text{konst.}\,, \quad \varphi_0 = \omega_0\,t$$

und periodisch schwankender Drehgeschwindigkeit $\omega_1(t)$ auf der Abtriebsseite läuft, wenn zwischen den Arbeitsmomenten die Beziehung

$$M_1(t) = \frac{M_0(t)}{g(t)} - J_1\,\dot{\omega}_1 \tag{4}$$

besteht. In der für alle weiteren Betrachtungen als geltend vorausgesetzten Gleichung (4) wurde zur Abkürzung

$$g(t) = \frac{\cos\chi}{1 - \sin^2\chi\sin^2\omega_0\,t} \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \text{konst.} \tag{5}$$

für die in (1) und (3) vorkommende periodische Funktion der Zeit gesetzt.

Zum stationären Lauf der Welle mit gegebenen Drehgeschwindigkeiten ω_0 und $\omega_1(\omega_0)$ werden nun zusätzliche Drehschwingungen betrachtet, welche als differentiell klein vorausgesetzte elastische Verdrehwinkel ϑ_0 und ϑ_1 bei den Drehmassen und als im gleichen Sinne klein angesehene Verdrehwinkel ϑ_{g0} und ϑ_{g1} beiderseits des Gelenkes zur Folge haben (Abb. 2). Während ϑ_0 und ϑ_1 unabhängige Verdrehwinkel zur Beschreibung der Drehschwingungen sind, besteht zwischen den Winkeln ϑ_{g0} und ϑ_{g1} beiderseitig des Gelenkes zunächst eine durch (1) gegebene Bindung. Denn wegen $\omega_0 = d\varphi_0/dt$, $\omega_1 = d\varphi_1/dt$ und der vorausgesetzten Kleinheit von ϑ_{g0} und ϑ_{g1} verlangt (1) für diese Verdrehwinkel die Gleichung

$$\vartheta_{g1} = g(t)\,\vartheta_{g0}\,. \tag{6}$$

Eine weitere Bindung zwischen ϑ_{g0} und ϑ_{g1} ergibt sich aus der Übertragungsgleichung im Kreuzgelenk für die schwingende Welle. Setzt man nämlich die bei den Drehschwingungen auftretenden elastischen Rückstellmomente den jeweiligen Verdrehwinkeln proportional an, so gilt

$$\widetilde{M}_{g0} = c_0\,(\vartheta_0 - \vartheta_{g0})\,, \quad \widetilde{M}_{g1} = c_1\,(\vartheta_{g1} - \vartheta_1)\,, \tag{7}$$

wenn c_0 und c_1 die Verdrehsteifigkeiten der Wellenstücke und eine aufgesetzte Tilde den Schwingungszustand bezeichnen. An Stelle von (3) gilt jetzt

$$\frac{\widetilde{M}_{g0}}{\widetilde{M}_{g1}} = \frac{c_0\,(\vartheta_0 - \vartheta_{g0})}{c_1\,(\vartheta_{g1} - \vartheta_1)} = \frac{\omega_1 + \dot{\vartheta}_{g1}}{\omega_0 + \dot{\vartheta}_{g0}}\,,$$

und die Beziehung liefert nach Linearisierung und mit der Abkürzung (5) eine weitere Gleichung zwischen ϑ_{g0} und ϑ_{g1}:

$$c_0\,(\vartheta_0 - \vartheta_{g0}) - g(t)\,c_1\,(\vartheta_{g1} - \vartheta_1) = 0\,. \tag{8}$$

Mit Hilfe von (6) und (8) lassen sich ϑ_{g0} und ϑ_{g1} durch ϑ_0 und ϑ_1 ausdrücken, so daß die Verdrehwinkel ϑ_0 und ϑ_1 als Schwingungskoordinaten verwendet werden können:

$$\vartheta_{g0} = \frac{c_0\,\vartheta_0 + g\,c_1\,\vartheta_1}{c_0 + c_1\,g^2}\,, \quad \vartheta_{g1} = \frac{g\,c_0\,\vartheta_0 + g^2\,c_1\,\vartheta_1}{c_0 + c_1\,g^2}\,. \tag{9), (10}$$

Damit lassen sich die Schwingungsgleichungen für Drehschwingungen beim stationären Betrieb der Welle angeben. Zunächst erhält man an Stelle der Gleichgewichtsbedingungen (2) nun für die schwingende Welle mit $\dot{\omega}_0 = 0$

$$M_0 - J_0\,\ddot{\vartheta}_0 - \tilde{M}_{g0} = 0\,, \quad \tilde{M}_{g1} - J_1\,(\dot{\omega}_1 + \ddot{\vartheta}_1) - M_1 = 0\,.$$

Mit den Rückstellmomenten (7) und der Gleichgewichtsbedingung (4) ergeben sich daraus dann die Schwingungsgleichungen

$$J_0\,\ddot{\vartheta}_0 + c_0\,(\vartheta_0 - \vartheta_{g0}) = M_0\,, \qquad J_1\,\ddot{\vartheta}_1 + c_1\,(\vartheta_1 - \vartheta_{g1}) = -\frac{M_0}{g}\,, \tag{11}$$

worin die rechten Seiten bei gegebenen Lastmoment M_0 bekannte Funktionen der Zeit sind und die ϑ_{g0} und ϑ_{g1} gemäß (10) durch ϑ_0 und ϑ_1 ausgedrückt werden können. Da der Ablenkwinkel χ klein ist, bietet sich hierbei eine Entwicklung nach Potenzen von $\sin\chi$ zur Vereinfachung an. Setzt man

$$k^2 = \sin^2\chi\,,$$

so ist gemäß (1)

$$g(t) = \frac{\cos\chi}{1 - \sin^2\chi\,\sin^2\omega_0\,t} = 1 - \frac{k^2}{2}\cos 2\,\omega_0\,t + 0(k^4)\,,$$

worin in sehr guter Näherung vierte Potenzen von $\sin\chi$ für $\chi \leqq 20°$ vernachlässigbar sind. Mit dieser Entwicklung und den Abkürzungen

$$\gamma_0 = \frac{c_0}{c_0 + c_1} < 1\,, \qquad \gamma_1 = \frac{c_1}{c_0 + c_1} < 1$$

für die Verhältnisse der Torsionssteifigkeiten vereinfachen sich die Gleichungen (9), (10) zu

$$\vartheta_{g0} = \gamma_0\,(1 + k^2\,\gamma_1\cos 2\,\tau)\,\vartheta_0 + \gamma_1\left(1 + k^2\left[\gamma_1 - \frac{1}{2}\right]\cos 2\,\tau\right)\vartheta_1 + 0(k^4)\,,$$

$$\vartheta_{g1} = \gamma_0\left(1 + k^2\left[\gamma_1 - \frac{1}{2}\right]\cos 2\,\tau\right)\vartheta_0 + \gamma_1\,(1 + k^2\,[\gamma_1 - 1]\cos 2\,\tau)\,\vartheta_1 + 0(k^4)\,,$$

worin noch durch

$$\tau = \omega_0\,t$$

eine dimensionslose Zeitzählung eingeführt ist. Da die Antriebsdrehzahl konstant vorausgesetzt wurde, lauten die Schwingungsgleichungen (11) ausführlich geschrieben,

$$\left.\begin{aligned} &\omega_0^2\,J_0\,\ddot{\vartheta}_0 + [c_0\,(1 - \gamma_0) - k^2\,c_0\,\gamma_0\,\gamma_1\cos 2\,\tau]\,\vartheta_0 - \left[c_0\,\gamma_1 + k^2\,c_0\,\gamma_1\left(\gamma_1 - \frac{1}{2}\right)\cos 2\,\tau\right]\vartheta_1 = M_0\,, \\ &\omega_0^2\,J_1\,\ddot{\vartheta}_1 + [c_1\,(1 - \gamma_1) - k^2\,c_1\,\gamma_1\,(\gamma_1 - 1)\cos 2\,\tau]\,\vartheta_1 \\ &\qquad - \left[c_1\,\gamma_0 + k^2\,c_1\,\gamma_0\left(\gamma_1 - \frac{1}{2}\right)\cos 2\,\tau\right]\vartheta_0 = -\,M_0 - M_0\frac{k^2}{2}\cos 2\,\tau\,, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

wenn Punkte nun Ableitungen nach $\tau = \omega_0\,t$ bezeichnen und weiterhin Potenzen $k^4 = \sin^4\chi$ und höhere unberücksichtigt bleiben. Das Gleichungssystem (12) beschreibt erzwungene rheolineare Drehschwingungen mit zwei Freiheitsgraden, obgleich nur zwei Drehmassen berücksichtigt sind. Dieser zunächst unerwartete Sachverhalt führt in der Schwingungsrechnung zu Besonderheiten, und es ist daher zweckmäßig, die Schwingungsgleichungen (12) durch Einführung von Hauptkoordinaten zu vereinfachen.

3. Einführung von Hauptschwingungskoordinaten. Setzt man in den Schwingungsgleichungen (12) $\chi = 0$, so müssen sich die bekannten Beziehungen eines Zweimassen-Drehschwingers mit nicht abgewinkelter Welle ergeben. In diesem Grenzfall ($k = \sin\chi = 0$) liefert dann der Drallsatz für das vorliegende Schwingungsproblem $J_0\,\vartheta_0 + J_1\,\vartheta_1 = 0$ und gestattet so, die Zahl der Freiheitsgrade auf einen zu verringern, indem man die Differenz der Verdrehwinkel $\vartheta_1 - \vartheta_0$ als neue Schwingungskoordinate einführt. Die hierdurch auch für den allgemeinen Fall ($k = \sin\chi \neq 0$) bedingten Vereinfachungen nutzt die nachfolgende Transformation auf Hauptkoordinaten aus. Mit der Abkürzung

$$c = \frac{c_0\,c_1}{c_0 + c_1} \tag{13}$$

und den Matrizen

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_0 = \begin{pmatrix} c & -c \\ -c & c \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_1 = \begin{pmatrix} c\,\gamma_0 & c\left(\gamma_1 - \frac{1}{2}\right) \\ c\left(\gamma_1 - \frac{1}{2}\right) & -c\,\gamma_1 \end{pmatrix} \tag{14), (15), (16)}$$

und den Vektoren

$$\mathfrak{d} = \begin{pmatrix} \vartheta_0(\tau) \\ \vartheta_1(\tau) \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{r} = \begin{pmatrix} M_0 \\ -M_0\left(1 + \frac{k^2}{2}\cos 2\,\tau\right) \end{pmatrix} \tag{17), (18)}$$

lassen sich die Schwingungsgleichungen (12) zu

$$\omega_0^2\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{d}'' + \mathfrak{A}_0\,\mathfrak{d} - k^2\cos 2\,\tau\cdot\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{d} = \mathfrak{r} \tag{19}$$

zusammenfassen. Das zugehörige kinetische Potential ist als Differenz der kinetischen Energie und der potentiellen Energie mit (14) bis (18) durch

$$L = -\frac{\omega_0^2}{2}\,\mathfrak{d}'\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{d}' + \frac{1}{2}\,\mathfrak{d}'\,\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{d} - \frac{k^2}{2}\cos 2\,\tau\cdot\mathfrak{d}'\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{d} - \mathfrak{d}'\mathfrak{r} \tag{20}$$

gegeben, wenn ein Akzent den Übergang zur gespiegelten Matrix bezeichnet. Die Einführung von Hauptkoordinaten verlangt nun die Einführung solcher Koordinaten, daß die ersten beiden quadratischen Formen in (20) rein quadratisch in den Verdrehgeschwindigkeiten und den Verdrehwinkeln werden. Da $\mathfrak{M}$ eine Diagonalmatrix ist, führt dies auf eine Matrizeneigenwertaufgabe der Zwischenstufe [1]. Man führt in solchen Fällen die Hauptkoordinaten $x_0(\tau)$, $x_1(\tau)$ durch die Transformation

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{M}^{-1/2}\,\mathfrak{U}\,\mathfrak{x} \tag{21}$$

ein, worin der Vektor

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_0(\tau) \\ x_1(\tau) \end{pmatrix} \tag{22}$$

und eine Diagonalmatrix

$$\mathfrak{M}^{-1/2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{J_0} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{J_1} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

sowie eine Transformationsmatrix $\mathfrak{U}$ vorkommen. Zur Bestimmung der Matrix $\mathfrak{U}$ hat man eine spezielle Eigenwertaufgabe für die charakteristischen Zahlen $\varkappa$ und die Eigenvektoren $\mathfrak{y}$ zu lösen:

$$\mathfrak{M}^{-1/2}\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{M}^{-1/2}\,\mathfrak{y} - \varkappa^2\,\mathfrak{y} = 0\,. \tag{24}$$

Man findet zunächst die Eigenwerte aus der zu (24) gehörenden Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{c}{J_0} - \varkappa^2 & -\frac{c}{\sqrt{J_0 J_1}} \\ -\frac{c}{\sqrt{J_0 J_1}} & \frac{c}{J_1} - \varkappa^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{25}$$

mit den Werten

$$\varkappa_0 = \sqrt{c\,\frac{J_0 + J_1}{J_0 J_1}}, \qquad \varkappa_1 = 0 \tag{26}$$

und kann dann die orthogonalen ($\mathfrak{y}_0'\,\mathfrak{y}_1 = 0$) und normierten ($\mathfrak{y}_0'\,\mathfrak{y}_0 = 1$, $\mathfrak{y}_1'\,\mathfrak{y}_1 = 1$) Lösungsvektoren $\mathfrak{y}_0$ und $\mathfrak{y}_1$ durch Auflösung von (24) leicht berechnen. Damit läßt sich die in (21) vorkommende orthogonale Transformationsmatrix $\mathfrak{U}$ zusammenstellen:

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} | & | \\ \mathfrak{y}_0 & \mathfrak{y}_1 \\ | & | \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{J_0 + J_1}}\begin{pmatrix} \sqrt{J_1} & \sqrt{J_0} \\ -\sqrt{J_0} & \sqrt{J_1} \end{pmatrix}, \tag{27}$$

und es gilt $\mathfrak{U}'\,\mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{U}^{-1} = \mathfrak{U}'$. Mit den Werten von (22), (23) und (26) wird das kinetische Potential (20) durch die Transformation (21) in die einfachere Form

$$L = -\frac{\omega_0^2}{2}\,\dot{\mathfrak{x}}'\,\dot{\mathfrak{x}} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{x}'\,\mathfrak{W}\,\mathfrak{x} - \frac{k^2}{2}\cos 2\,\tau\cdot\mathfrak{x}'\,\mathfrak{Q}\,\mathfrak{x} - \mathfrak{x}'\,\mathfrak{R} \tag{28}$$

[1] Vgl. *L. Collatz*, Eigenwertaufgaben, S. 253, Leipzig 1949.

übergeführt. In (28) kommen die symmetrischen Matrizen

$$\mathfrak{W} = \begin{pmatrix} \varkappa_0^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{29}$$

und

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{U}'\,\mathfrak{M}^{-1/2}\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{M}^{-1/2}\,\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{pmatrix}$$

$$= c \begin{pmatrix} \dfrac{J_1}{J_0+J_1}\left[\dfrac{\gamma_0}{J_0} - 2\dfrac{\gamma_1 - \frac{1}{2}}{J_1} - \dfrac{\gamma_1}{J_1}\cdot\dfrac{J_0}{J_1}\right] & \dfrac{\sqrt{J_0\,J_1}}{J_0+J_1}\left[\dfrac{\gamma_0}{J_0} + \left(\gamma_1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{J_0} - \dfrac{1}{J_1}\right) + \dfrac{\gamma_1}{J_1}\right] \\ \dfrac{\sqrt{J_0\,J_1}}{J_0+J_1}\left[\dfrac{\gamma_0}{J_0} + \left(\gamma_1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{J_0} - \dfrac{1}{J_1}\right) + \dfrac{\gamma_1}{J_1}\right] & \dfrac{J_0}{J_0+J_1}\left[\dfrac{\gamma_0}{J_0} + 2\dfrac{\gamma_1 - \frac{1}{2}}{J_0} - \dfrac{\gamma_1}{J_0}\right] \end{pmatrix} \tag{30}$$

vor. Ferner bezeichnet $\mathfrak{R}$ in (28) den Vektor

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} R_0 \\ R_1 \end{pmatrix} = \mathfrak{U}'\,\mathfrak{M}^{-1/2}\,\mathfrak{r} = \begin{pmatrix} M_0\left(\sqrt{\dfrac{J_0+J_1}{J_0\,J_1}} + \sqrt{\dfrac{J_0}{J_1\,(J_0+J_1)}}\,\dfrac{k^2}{2}\cos 2\,\tau\right) \\ -\,M_0\dfrac{1}{\sqrt{J_0+J_1}}\cdot\dfrac{k^2}{2}\cos 2\,\tau \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Das kinetische Potential (28) liefert nun über die *Lagrange*schen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 0, 1)$$

die Schwingungsgleichungen (12) in den Hauptkoordinaten:

$$\left.\begin{aligned} \omega_0^2\,\ddot{x}_0 + \varkappa_0^2\,x_0 - k^2\cos 2\,\tau\,(c_{00}\,x_0 + c_{01}\,x_1) &= M_0\left(\sqrt{\frac{J_0+J_1}{J_0\,J_1}} + \sqrt{\frac{J_0}{J_1\,(J_0+J_1)}}\,\frac{k^2}{2}\cos 2\,\tau\right), \\ \omega_0^2\,\ddot{x}_1 - k^2\cos 2\,\tau\,(c_{10}\,x_0 + c_{11}\,x_1) &= -M_0\frac{1}{\sqrt{J_0+J_1}}\,\frac{k^2}{2}\cos 2\,\tau\,. \end{aligned}\right| \tag{32}$$

Die freien Schwingungen derartiger rheolinearer Schwinger sind in anderem Zusammenhang von *E. Mettler* [1] untersucht worden, und auch gewisse Resonanzeigenschaften der erzwungenen Schwingungen sind bekannt [2]. Allerdings liegt hier insofern ein Sonderfall vor, als eine „Eigenfrequenz" verschwindet.

Um die mechanische Bedeutung dieser Entartung hervortreten zu lassen, werde nochmals der Grenzfall der nichtabgewinkelten Welle betrachtet: $\chi = 0$ d. h. $k = 0$. Dann werden die Schwingungsgleichungen (32) sehr einfach:

$$\omega_0^2\,\overset{(0)}{\ddot{x}_0} + \varkappa_0^2\,\overset{(0)}{x_0} = M_0\sqrt{\frac{J_0+J_1}{J_0\,J_1}}\,, \qquad \omega_0^2\,\overset{(0)}{\ddot{x}_1} = 0\,, \tag{33}$$

wobei der Index oben Null den Grenzfall $k = 0$ bezeichnet. Um die Hauptkoordinaten $\overset{(0)}{x_0}$, $\overset{(0)}{x_1}$ in den ursprünglichen Koordinaten, den Verdrehwinkeln $\overset{(0)}{\vartheta_0}$, $\overset{(0)}{\vartheta_1}$, auszudrücken, wird die Umkehrung der Transformation (21) benötigt:

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \mathfrak{U}'\,\mathfrak{M}^{1/2}\,\mathfrak{d} = \frac{1}{\sqrt{J_0+J_1}}\begin{pmatrix} \sqrt{J_0\,J_1}\,\vartheta_0 - \sqrt{J_0\,J_1}\,\vartheta_1 \\ J_0\,\vartheta_1 \quad + \quad J_1\,\vartheta_1 \end{pmatrix}.$$

Damit erkennt man die Gleichungen (33) als eine Drehschwingungsgleichung mit der Eigenkreisfrequenz $\varkappa_0$ für den einzigen bei nicht abgewinkelter Welle noch verbleibenden Freiheitsgrad:

$$\omega_0^2\left(\overset{(0)}{\ddot{\vartheta}_0} - \overset{(0)}{\ddot{\vartheta}_1}\right) + \varkappa_0^2\left(\overset{(0)}{\vartheta_0} - \overset{(0)}{\vartheta_1}\right) = M_0\,\frac{J_0+J_1}{J_0\,J_1}$$

und eine Aussage

$$\omega_0^2\,\frac{1}{\sqrt{J_0+J_1}}\left(J_0\,\overset{(0)}{\ddot{\vartheta}_0} + J_1\,\overset{(0)}{\ddot{\vartheta}_1}\right) = 0\,,$$

[1] *E. Mettler*, Ing.-Arch. 17 (1949) S. 418.
[2] *F. Weidenhammer*, Z. angew. Math. Mech. 32 (1952) S. 154.

die auf den Drallsatz $J_0 \overset{(0)}{\vartheta}_0 + J_1 \overset{(0)}{\vartheta}_1 = 0$ hin ausgewertet werden kann. Für die abgewinkelte Kreuzgelenkwelle ($k \neq 0$) gilt offenbar die letzte Beziehung nicht mehr. Die vektoriellen Aussagen dieses Satzes verlangen dann die Einbeziehung auch der Momente der periodisch schwankenden Lagerbelastungen und führen also nicht zu hier allein interessierenden Aussagen über das Drehgleichgewicht der reibungslos rotierend gedachten Kreuzgelenkwelle. Auf Grund der eigentümlichen Übertragungsverhältnisse im Kreuzgelenk ($\overline{M}_{g0}/\overline{M}_{g1} \neq 1$) erfolgen die Drehschwingungen mit zwei Freiheitsgraden. Tatsächlich würde die Mitberücksichtigung vierter Potenzen von $k = \sin\chi$ in den Schwingungsgleichungen (12) auch eine zweite Eigenkreisfrequenz $\varkappa_1^2 = 0(k^4)$ liefern. Da jedoch bei den vorliegenden technischen Aufgabenstellungen $\chi \leqq 20°$ ist, sollen Potenzen $k^4 = \sin\chi^4$ als vernachlässigbar klein außer Ansatz bleiben, so daß $\varkappa_1^2 = 0$ gesetzt werden muß.

In den Schwingungsgleichungen (32) müssen die Zwangsglieder in bezug auf ihre Periodizität betrachtet werden, wenn man das Resonanzverhalten verstehen will. Im allgemeinen (z. B. bei Antrieb durch Kolbenmotore) wird das durchgeleitete Arbeitsmoment M_0 nicht konstant sein, sondern mit dem Drehwinkel periodisch schwanken. Gilt also die *Fourier*zerlegung

$$M_0(\tau) = \sum_{r=0}^{\infty} (a_r \cos r\tau + b_r \sin r\tau) \tag{34}$$

mit bekannten Entwicklungskoeffizienten a_r, b_r, so sind die Erregerglieder R_0 und R_1 durch (31) ebenfalls leicht als *Fourier*sche Reihen vom gleichen Typ anzugeben:

$$R_i = \sum_{r=0}^{\infty} (\alpha_{i,r} \cos r\tau + \beta_{i,r} \sin r\tau) \quad (i = 0, 1)\,, \tag{35}$$

worin die Koeffizienten $\alpha_{i,r}$ und $\beta_{i,r}$ im weiteren jedoch zahlenmäßig nicht bekannt zu sein brauchen. In den Hauptschwingungsgleichungen (32) kommen demnach als Erregerglieder im allgemeinen trigonometrische Reihen mit der Periode 2π vor. Wenn jedoch M_0 spezieller zusammengesetzt ist, kann dies bei rheolinearen Schwingern wesentlichen Einfluß auf die Lage der Resonanzen haben. Bei den vorliegenden Aufgabenstellungen dürfte jedoch nur der Fall eines konstanten Drehmomentes M_0, wie es etwa bei elektrischem Antrieb gegeben ist, Bedeutung haben. Für $M_0 =$ konst. sind die Erregerglieder (35) unmittelbar durch (31) selbst gegeben. R_0 und R_1 sind demnach in diesem Falle gerade Funktionen der Zeit mit der kürzeren Periode π, was ein Absinken der Resonanzdrehzahlen auf kleinere Werte zur Folge hat, wie sich zeigen wird.

4. Die Resonanzfrequenzen. Zur Auffindung der resonanzkritischen Drehgeschwindigkeiten (Resonanzfrequenzen) $\omega_0 = \alpha_0$ der Antriebswelle sollen nun die durch (32) beschriebenen erzwungenen Schwingungen berechnet werden. Zu dem Zweck werden die *Fourier*ansätze

$$x_i = \sum_{r=0}^{\infty} (A_{i,r} \cos r\tau + B_{i,r} \sin r\tau) \quad (i = 0, 1) \tag{36}$$

in (32) eingesetzt gedacht und der Ablenkwinkel χ durch $\sin\chi = k$ als kleiner Parameter k in die Rechnung aufgenommen. Das dann entstehende unendliche Gleichungssystem für die *Fourier*koeffizienten $A_{i,r}$ und $B_{i,r}$ braucht im einzelnen nicht niedergeschrieben werden [1]. Es genügt lediglich zu erkennen, daß dieses System in vier voneinander unabhängige Teilsysteme zerfällt. Denn auf Grund der in (32) allein auftretenden Produkte

$$\left.\begin{aligned} \cos 2\tau \cdot A_{i,r} \cos r\tau &= \frac{A_{i,r}}{2}\big(\cos(r+2)\tau + \cos(r-2)\tau\big), \\ \cos 2\tau \cdot B_{i,r} \sin r\tau &= \frac{B_{i,r}}{2}\big(\sin(r+2)\tau + \sin(r-2)\tau\big) \end{aligned}\right| \tag{37}$$

kann erstens keine Mischung der cos- und sin-Ansätze von (36) eintreten, so daß also die Koeffizientengleichungen entweder die $A_{i,r}$ oder die $B_{i,r}$ je für sich allein enthalten. Zweitens bedingen die Identitäten (37) auch noch, daß in einer Koeffizientengleichung jeweils nur $A_{i,r}$ oder $B_{i,r}$ mit geradzahligem oder ungeradzahligem Zweitindex vorkommen können. Demnach verbleiben vier voneinander unabhängige inhomogene Gleichungssysteme zur Berechnung

[1] Vgl. Formel (9) und (10) der in Fußnote 2 auf Seite 193 genannten Arbeit.

der *Fourier*koeffizienten aus den Ansätzen (36). Die jeweils unendlich viele Unbekannte enthaltenden Systeme seien durch

$$(A_{0,2r+1}\ A_{1,2r+1}) = (\alpha_{0,2r+1}\ \alpha_{1,2r+1}), \tag{38a}$$

$$(A_{0,2r}\quad A_{1,2r}) = (\alpha_{0,2r}\quad \alpha_{1,2r}), \tag{38b}$$

$$(B_{0,2r+1}\ B_{1,2r+1}) = (\beta_{0,2r+1}\ \beta_{1,2r+1}), \tag{38c}$$

$$(B_{0,2r}\quad B_{1,2r}) = (\beta_{0,2r}\quad \beta_{1,2r}), \tag{38d}$$

bezeichnet und enthalten als inhomogene Seiten die *Fourier*koeffizienten der Zwangsglieder (35). Die Auflösung der Gleichungen ist möglich, sofern keine der (konvergenten) unendlichen Koeffizientendeterminanten für $A_{i,r}$ und $B_{i,r}$ verschwindet. Ist dies jedoch für gewisse Parameterwerte ω_0 und k bei auch nur einer Determinante der Fall, so liegt ein Resonanzfall vor, denn erzwungene Schwingungen endlicher Amplituden lassen sich nicht mehr durch den *Fourier*ansatz (36) berechnen. Allerdings tritt dieser Resonanzfall nur ein, wenn mindestens ein *Fourier*koeffizient der Erregung auf der inhomogenen Gleichungsseite dieses Teilsystems von Null verschieden ist. Im Falle des konstanten Drehmomentes M_0 hat diese Einschränkung eine Verminderung der Resonanzgefahr zur Folge, wie sich ergeben wird.

Zur Berechnung der resonanzkritischen Werte $\alpha_0 = \omega_0(k)$ könnte man nun die Determinantengleichungen zu den Gleichungen (38) heranziehen und α_0 aus diesen berechnen:

$$\Delta(A_{0,2r+1}\ A_{1,2r+1}) = 0, \tag{39a}$$

$$\Delta(A_{0,2r}\quad A_{1,2r}) = 0, \tag{39b}$$

$$\Delta(B_{0,2r+1}\ B_{1,2r+1}) = 0, \tag{39c}$$

$$\Delta(B_{0,2r}\quad B_{1,2r}) = 0. \tag{39d}$$

Doch kann man die Werte α_0 über die freien Schwingungen wesentlich einfacher berechnen. Offenbar besagt das Verschwinden einer der Koeffizientendeterminanten (39), daß die zugehörigen homogenen Gleichungen eine bestimmte periodische Lösung besitzen, da ja ihre *Fourier*koeffizienten aus den homogenen Gleichungen von Null verschieden zu berechnen sind. Über diese freien Schwingungen kann man auf Grund der Determinantengleichungen noch weitergehende Aussagen machen. So beschreiben (39a) und (39c) Schwingungen mit der Periode 2π, wobei (39a) nur cos-Glieder und (39c) nur sin-Glieder enthält. Dagegen führen (39b) und (39d) auf freie Schwingungen mit der kleineren Periode π, wobei (39b) wiederum nur cos-Summanden und (39d) nur sin-Glieder enthält.

Nachdem auf diese Weise die Zusammensetzung der freien Schwingungen weitgehend bekannt ist, kann man diese nun mit einer kurzen Störungsrechnung sehr einfach berechnen und die zugehörigen Frequenzparameter $\alpha_0(k)$ angeben. Diese Eigenfrequenzwerte α_0 sind dann die gesuchten resonanzkritischen Drehgeschwindigkeiten. Zur Auffindung dieser Werte $\omega_0 = \alpha_0$ werden sowohl die Frequenzparameter wie auch die periodischen Lösungen der Schwingungsgleichung nach dem kleinen Parameter k entwickelt:

$$\alpha_0 = \overset{(0)}{\alpha_0} + k^2 \overset{(2)}{\alpha_0} + 0(k^4), \tag{40}$$

$$x_i = \overset{(0)}{x_i} + k^2 \overset{(2)}{x_i} + 0(k^4) \quad (i = 0, 1). \tag{41}$$

Führt man diese Ansätze in die homogen gemachten Gleichungen (32) ($M_0 = 0$) ein, so erhält man zur Berechnung der freien Schwingungen nach einem Vergleich gleichhoher Potenzen von k die rekursibel auflösbaren Differentialgleichungen

$$\overset{(0)}{\alpha_0^2}\,\overset{(0)}{\ddot{x}_0} + \overset{(0)}{\varkappa_0^2}\,\overset{(0)}{x_0} = 0, \qquad \overset{(0)}{\alpha_0^2}\,\overset{(0)}{\ddot{x}_1} = 0; \tag{42a}$$

$$\left.\begin{aligned} &\overset{(0)}{\alpha_0^2}\,\overset{(2)}{\ddot{x}_0} + \overset{(2)}{\varkappa_0^2}\,\overset{(2)}{x_0} = \cos 2\tau \left(c_{00}\overset{(0)}{x_0} + c_{01}\overset{(0)}{x_1}\right) - 2\,\overset{(0)}{\alpha_0}\,\overset{(2)}{\alpha_0}\,\overset{(0)}{\ddot{x}_0}, \\ &\overset{(0)}{\alpha_0^2}\,\overset{(2)}{\ddot{x}_1} = \cos 2\tau \left(c_{10}\overset{(0)}{x_0} + c_{11}\overset{(0)}{x_1}\right) - 2\,\overset{(0)}{\alpha_0}\,\overset{(2)}{\alpha_0}\,\overset{(0)}{\ddot{x}_1}; \quad \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{42b}$$

Durch Auflösung der inhomogenen Differentialgleichungen sollen nacheinander die periodischen Lösungen berechnet werden, deren Vorhandensein aus den Gleichungen (39) abzulesen waren.

a) $\cos(2r+1)\tau$-Typ entsprechend (39a). Als Ausgangslösung ist hier $\overset{(0)}{x_0} = \cos(2r+1)\tau$ $(r = 0, 1, \ldots)$ zu nehmen. Dann folgt aus den Gleichungen (42a) zunächst

$$\overset{(0)}{\alpha_0} = \frac{\varkappa_0}{2r+1}$$

und weiter muß $\overset{(0)}{x_1} \equiv 0$ sein, da eine periodische Partikularlösung aus den Gleichungen (42) berechnet werden soll. Die erste Gleichung (42b) lautet mit den gefundenen Werten dann

$$\frac{\varkappa_0^2}{(2r+1)^2}\overset{(2)}{x_0}'' + \varkappa_0^2 \overset{(2)}{x_0} = \frac{c_{00}}{2}\left(\cos(2r+3)\tau + \cos(2r-1)\tau\right) + 2\overset{(0)}{\alpha_0}\overset{(2)}{\alpha_0}(2r+1)^2\cos(2r+1)\tau,$$

und man erkennt, daß $\overset{(2)}{x_0}$ nur dann frei von nichtperiodischen Gliedern bleibt, wenn man $\overset{(2)}{\alpha_0}$ speziell wählt:

$$\overset{(2)}{\alpha_0} = -\frac{c_{00}}{4\varkappa_0} \text{ für } r = 0 \quad \text{und} \quad \overset{(2)}{\alpha_0} = 0 \text{ für } r = 1, 2, \ldots.$$

Damit sind folgende Resonanzfrequenzen gefunden:

$$\alpha_0 = \varkappa_0 - k^2\frac{c_{00}}{4\varkappa_0} + 0(k^4) \quad (r = 0), \tag{43}$$

$$\alpha_0 = \frac{\varkappa_0}{2r+1} + 0(k^4) \quad (r = 1, 2, \ldots). \tag{44}$$

Auf Grund von (38a) sind diese Werte dann resonanzgefährlich, wenn das durchgeleitete Arbeitsmoment *Fourier*anteile vom $\cos(2r+1)\tau$-Typ (Periode 2π) enthält.

b) $\sin(2r+1)\tau$-Typ entsprechend (39c). Die Ausgangslösung $\overset{(0)}{x_0} = \sin(2r+1)\tau$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ führt nach einer entsprechenden Rechnung wie in a) auf die Resonanzfrequenzen

$$\alpha_0 = \varkappa_0 + k^2\frac{c_{00}}{4\varkappa_0} + 0(k^4) \qquad (r = 0), \tag{45}$$

$$\alpha_0 = \frac{\varkappa_0}{2r+1} + 0(k^4) \qquad (r = 1, 2, \ldots), \tag{46}$$

die gemäß (38c) resonanzgefährlich sind, wenn in der Erregung Anteile $\sin(2r+1)\tau$ (Periode 2π) vorkommen.

c) $\cos 2r\tau$-Typ entsprechend (39b). Als Ausgangslösung muß hier $\overset{(0)}{x} = \cos 2r\tau$ $(r = 1, 2, \ldots)$ genommen werden. Dann liefert (42a) zunächst

$$\overset{(0)}{\alpha_0} = \frac{\varkappa_0}{2r}$$

und wieder $\overset{(0)}{x_1} \equiv 0$, während aus (42b)

$$\left(\frac{\varkappa_0}{2r}\right)^2\overset{(2)}{x_0}'' + \varkappa_0^2\overset{(2)}{x_0} = \frac{c_{00}}{2}\left(\cos(2r+2)\tau + \cos(2r-2)\tau\right) + 2\overset{(0)}{\alpha_0}\overset{(2)}{\alpha_0}\cdot\frac{1}{4r^2}\cos 2r\tau$$

folgt. Also muß $\overset{(2)}{\alpha_0} = 0$ sein, damit auch $\overset{(2)}{x_0}$ rein periodisch wird. Es gilt also hier

$$\alpha_0 = \frac{\varkappa_0}{2r} + 0(k^4) \quad (r = 1, 2, \ldots), \tag{47}$$

und diese Frequenzen sind resonanzgefährlich, wenn $\cos 2r\tau$-Anteile (Periode π) in den Erregergliedern R_0 und R_1 enthalten sind. Dies ist nicht nur der Fall, wenn das Arbeitsmoment M_0 derartige Anteile enthält, sondern auch schon dann, wenn $M_0 =$ konst. ist und nur durch den Kreuzgelenkmechanismus eine Schwingungserregung gegeben ist.

d) $\sin 2r\tau$-Typ entsprechend (39d). Von der Ausgangslösung $\overset{(0)}{x_0} = \sin 2r\tau$ $(r = 1, 2, \ldots)$ ausgehend erhält man hier auf gleichem Wege wie in c) die Frequenzbeziehung

$$\alpha_0 = \frac{\varkappa_0}{2r} + 0(k^4) \tag{48}$$

als resonanzgefährlich, wenn $\sin 2r\tau$-Anteile in M_0 (und damit auch in R_0 und R_1) vorkommen.

In der vorstehenden Störungsrechnung sind genau wie in den mechanischen Ausgangsgleichungen Potenzen $k^4 = \sin^4\chi$ und höhere als klein vernachlässigt. Nur auf Grund dieser

Vernachlässigungen fallen die Frequenzgleichungen (44) mit (46) und (47) mit (48) zusammen. Eine ausführliche Rechnung würde ergeben, daß diese Frequenzkurven $\alpha_0(k)$ lediglich für $k = 0$ eine Berührung höherer Ordnung eingehen.

Die resonanzkritischen Drehgeschwindigkeiten der Antriebsseite $\omega_0 = \alpha_0(k)$ sind in ihrer Lage zueinander aus Abb. 3 für $c_{00} > 0$, $k^4 = 0$ zu entnehmen. Die Resonanzen bei den Werten $\varkappa_0/r$ ($r = 2, 3, 4, \ldots$) nennt man Subresonanzen; sie sind bis $r = 5$ in das Diagramm aufgenommen. Ferner bezeichnen die Abkürzungen s_r die $\sin r\tau$-Typen von (39c) und (39d), während c_r für die $\cos r\tau$-Typen von (39a) und (39b) steht. Man kann so die in a) bis d) diskutierten Resonanzmöglichkeiten ablesen. So sind für konstantes M_0 alle c_r mit geradem r kritisch, also alle Frequenzen $\varkappa_0/2r$ ($r = 1, 2, \ldots$), nicht jedoch z. B. $\varkappa_0$ selbst. In diesem Falle haben also allein die Subresonanzen Bedeutung. Dies Verhalten ist durch die periodischen Koeffizienten in den Schwingungsgleichungen (32) bedingt und steht in bemerkenswertem Gegensatz zu den Drehschwingungen, die sich durch lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschreiben lassen, bei welchen es keine Subresonanzen gibt.

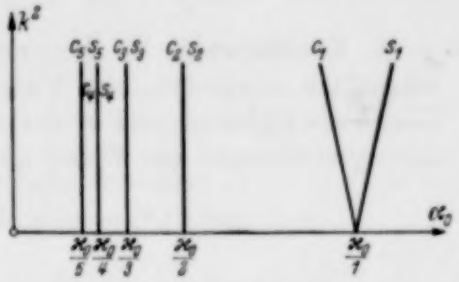

Abb. 3. Lage der kritischen Drehgeschwindigkeiten auf der Antriebseite.

Die bei rheolinearen Schwingern möglichen instabilen freien Schwingungen haben bei den Kreuzgelenkwellen wohl keine Bedeutung, da man bei diesen Wellen auf Grund der starken Lagerbelastungen vermutlich stets eine Dämpfung haben dürfte, welche freie Schwingungen schnell abklingen läßt. Im Gegensatz hierzu behalten bekanntlich die erzwungenen Schwingungen auch bei Anwesenheit dämpfender Kräfte ihre Bedeutung, weswegen sie ausführlich untersucht wurden.

5. Zusammenfassung. Die Schwingungsgleichungen zur Berechnung der Drehschwingungen in einer abgewinkelten Kreuzgelenkwelle (Ablenkwinkel χ) wurden bei Berücksichtigung je einer Drehmasse auf der Antriebs- und Abtriebsseite aufgestellt. Sie beschreiben auf Grund der Übertragungsverhältnisse im Gelenk erzwungene rheolineare Schwingungen mit zwei Freiheitsgraden. Dabei entsteht eine Schwingungserregung auch dann schon, wenn das durchgeleitete Arbeitsmoment M_0 keinen Schwankungen unterworfen, sondern streng konstant ist. Die resonanzgefährlichen Drehgeschwindigkeiten $\omega_0 = \alpha_0$ der Antriebswelle wurde bei Vernachlässigung von $\sin^4\chi$ für kleine Ablenkwinkel (etwa $\leqq 20°$) berechnet. Dabei erweisen sich im allgemeinen Falle ($M_0 \neq$ konst.) die Werte

$$\alpha_0 = \varkappa_0 \pm \sin^2\chi \frac{c_{00}}{4\varkappa_0} + 0(\sin^4\chi)$$

und die Subresonanzen

$$\alpha_0 = \varkappa_0/r + 0(\sin^4\chi) \qquad (r = 2, 3, 4, \ldots)$$

als resonanzgefährlich, wenn $\varkappa_0$ die Eigenkreisfrequenz (26) und c_{00} den durch (30) gegebenen Wert bezeichnen. Für den Sonderfall eines streng gleichförmigen Arbeitsmomentes ($M_0 =$ konst.) bleiben nur die Subresonanzen

$$\alpha_0 = \frac{\varkappa_0}{2r} + 0(\sin^4\chi) \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

übrig, da die Resonanzmöglichkeiten der rheolinearen Schwinger von der Zusammensetzung der Erregung abhängen.

Aus dem Institut für Mechanische Schwingungstechnik der Technischen Hochschule Karlsruhe.

(Eingegangen am 27. Juli 1954.)

Anschrift des Verfassers: Priv.-Doz. Dr. *F. Weidenhammer*, Karlsruhe i. B., Hertzstr. 16 Bau 40.

Asymptotische Absaugegrenzschichten an längsangeströmten zylindrischen Körpern*.

Von W. Wuest.

1. Einführung. Ein besonders einfacher Sonderfall einer Absaugegrenzschicht tritt an einer unendlich ausgedehnten Wand mit gleichförmig verteilter Absaugegeschwindigkeit auf. Das Geschwindigkeitsprofil u der Grenzschicht ist an jeder Stelle gleich und nur von der Koordinate y senkrecht zur Wand abhängig entsprechend der Beziehung

$$\frac{u}{U} = 1 - e^{-\frac{v_0 y}{\nu}}$$

(U bezeichnet dabei die konstante Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht und v_0 die konstante Absaugegeschwindigkeit.) Eine unendlich ausgedehnte ebene Wand ist freilich nur ein mathematischer Idealfall. Bei einer Platte endlicher Ausdehnung mit gleichmäßig verteilter Absaugegeschwindigkeit tritt das genannte Geschwindigkeitsprofil als asymptotische Lösung für genügend großen Abstand von der Vorderkante auf.

Es liegt nahe, allgemeinere Fälle solcher Absaugegrenzschichten zu untersuchen. Eine mögliche Verallgemeinerung besteht darin, längsangeströmte zylindrische Flächen in Betracht zu ziehen. Wenn man sich auch hier wieder auf die asymptotischen Lösungen beschränkt, gelangt man zum Grenzfall unendlich langer zylindrischer Körper, die in Achsrichtung angeströmt werden und bei denen die Verteilung der Absaugegeschwindigkeit nicht von der x-Koordinate in Achsrichtung abhängt. Offenbar müssen in diesem Fall alle Geschwindigkeitskomponenten unabhängig von x sein, so daß in den *Navier-Stokes*schen Differentialgleichungen alle Ableitungen nach x verschwinden.

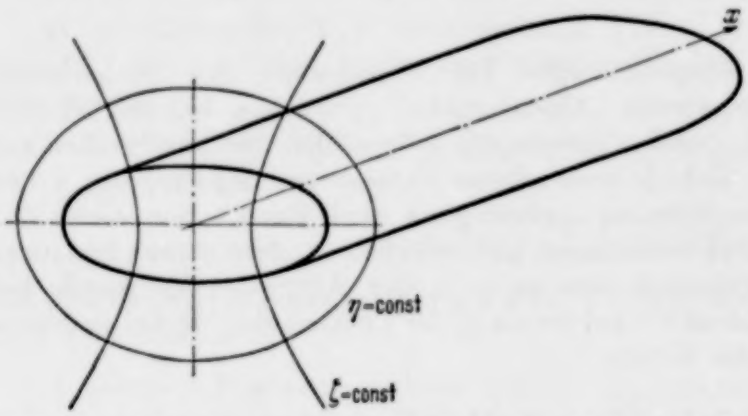

Abb. 1. x, η, ζ-Koordinatensystem, dargestellt am Beispiel des elliptischen Zylinders.

Es ist für das Folgende zweckmäßig, von den rechtwinkligen x, y, z-Koordinaten zu x, η, ζ-Koordinaten überzugehen, wobei η, ζ krummlinige, isometrische Koordinaten sind. Man kann diese durch konforme Abbildung eines Quadratnetzes gewinnen, wobei wir den örtlich veränderlichen Maßstabsfaktor mit H bezeichnen wollen. Das Koordinatensystem soll dabei so gewählt werden, daß die Begrenzung des Körpers durch $\eta = \eta_0 = \text{konst.}$ gegeben ist. Abb. 1 zeigt diese Festlegungen am Beispiel des elliptischen Zylinders. Die Kontinuitätsgleichung und die drei Bewegungsgleichungen lauten dann, wenn u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten in den x, η, ζ-Richtungen bezeichnen,

$$\frac{\partial (v H)}{\partial \eta} + \frac{\partial (w H)}{\partial \zeta} = 0\,, \tag{1}$$

$$v H \frac{\partial u}{\partial \eta} + w H \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \right), \tag{2}$$

$$v H \frac{\partial v}{\partial \eta} + w H \frac{\partial v}{\partial \zeta} + v w \frac{\partial H}{\partial \zeta} - w^2 \frac{\partial H}{\partial \eta} = -\frac{1}{\varrho} H \frac{\partial p}{\partial \eta} + \nu \left[H \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{H^2} \frac{\partial (v H)}{\partial \zeta} - H \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{H^2} \frac{\partial (w H)}{\partial \eta} \right], \tag{3}$$

$$v H \frac{\partial w}{\partial \eta} + w H \frac{\partial w}{\partial \zeta} + v w \frac{\partial H}{\partial \eta} - v^2 \frac{\partial H}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\varrho} H \frac{\partial p}{\partial \zeta} + \nu \left[- H \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{H^2} \frac{\partial (v H)}{\partial \zeta} + H \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{H^2} \frac{\partial (w H)}{\partial \eta} \right]. \tag{4}$$

---

* Auszugsweise vorgetragen auf der Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik in München am 21. 4. 1954.

Die Geschwindigkeitskomponente u kommt nur in (2) vor; v, w können also unabhängig von u berechnet werden. Doch kann aus einer für v, w gewonnenen Lösung noch nicht gefolgert werden, daß man auch für u eine Lösung erhält, welche die Randbedingungen befriedigt.

Führt man noch die x-Komponente der Rotation des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}$

$$\mathrm{rot}_x\,\mathfrak{v} = 2\,\omega = \frac{1}{H^2}\left[\frac{\partial(wH)}{\partial\eta} - \frac{\partial(vH)}{\partial\zeta}\right] \tag{5}$$

ein, so können (3) und (4) nach Elimination des Druckes zusammengefaßt werden in

$$v\,H\,\frac{\partial\omega}{\partial\eta} + \underline{w\,H\,\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}} = \nu\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\zeta^2}\right]. \tag{6}$$

Wir können offenbar die Fälle unterscheiden:

a) $\omega = 0$ Querströmung ist wirbelfrei, also eine Potentialströmung,
b) $\omega =$ konst. im Unendlichen dreht sich die Flüssigkeit als starrer Körper,
c) $\omega = \omega(\eta)$ oder $\omega = \omega(\zeta)$,
d) $\omega = \omega(\eta, \zeta)$ $\begin{cases} w = 0 & \textit{Hamel}\text{sche spiralförmige Strömungen als Querbewegung,} \\ w \neq 0 & \text{allgemeiner Fall.} \end{cases}$

2. Absaugegrenzschichten mit wirbelfreier Querbewegung. Da die Querbewegung (v, w-Komponenten der dreidimensionalen Strömung) eine Potentialbewegung [1] ist, können wir das Koordinatensystem so wählen, daß $w = 0$ ist. In (1) bis (6) fallen dann die unterstrichenen Größen weg. Aus der Kontinuitätsgleichung (1) und der Beziehung (5) folgt mit $\omega = 0$:

$$v\,H = F = \text{konst.} \tag{7}$$

Im Fall rechtwinkliger Koordinaten ist $H = 1$ und demnach $v =$ konst. Dies entspricht aber der homogenen Absaugegrenzschicht an einer unendlich ausgedehnten ebenen Wand und wir können daher die Bedingung (7) als eine Veraligemeinerung der homogenen Absaugegrenzschicht auf beliebige zylindrische Körper auffassen.

Aus $v\,H = F =$ konst. folgt

$$v\,\frac{\partial v}{\partial\eta} = -\,\frac{v^2}{H}\,\frac{\partial H}{\partial\eta},$$

so daß (3) und (4) geschrieben werden können:

$$\frac{F^2}{2}\,\frac{\partial(1/H^2)}{\partial\eta} = -\,\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial\eta}, \qquad \frac{F^2}{2}\,\frac{\partial(1/H^2)}{\partial\zeta} = -\,\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial\zeta}$$

mit der Lösung

$$p = p_0 - \frac{\varrho}{2}\,F^2\,\frac{1}{H^2} = p_0 - \frac{\varrho}{2}\,v^2.$$

Für die Geschwindigkeitskomponente u erhält man die Differentialgleichung:

$$F\,\frac{\partial u}{\partial\eta} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}\right), \tag{8}$$

die man durch den Ansatz

$$u = C_1\,e^{\alpha\eta + \beta\zeta} + C_2 \tag{9}$$

lösen kann. Durch Einsetzen in (5) folgt

$$F\,\alpha = \nu\,(\alpha^2 + \beta^2). \tag{10}$$

Wenn die Wandkurve durch $\alpha\,\eta + \beta\,\zeta =$ konst. gegeben ist, kann mit diesem Ansatz also die Randbedingung $u = 0$ an der Wand und $u = U$ außerhalb der Grenzschicht befriedigt werden.

3. Beispiele. a) Ruhender Kreiszylinder. Zweckmäßig wählen wir hier $\eta = \ln r$, $H = r$, $F = -\,v_0\,a$; dabei ist a der Halbmesser des Kreiszylinders und v_0 die konstante Absaugegeschwindigkeit an seiner Wandung. Da die Wandung durch $\eta_0 = \ln a =$ konst. dargestellt ist, setzen wir in (6) $\beta = 0$ und erhalten $\alpha = -\,v_0\,a/\nu$. Die Geschwindigkeitsverteilung der u-Kom-

[1] Die Potentialströmung ist bekanntlich eine Lösung der *Navier-Stokes*schen Differentialgleichungen. Doch erfüllt die Potentialströmung im allgemeinen nicht die zu stellenden Randbedingungen.

ponente ist also bei Beachtung der Randbedingungen

$$\frac{u}{U} = 1 - e^{\frac{-v_0 a}{\nu} \ln \frac{r}{a}} = 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{-v_0 a}{\nu}} . \tag{11}$$

In Abb. 2 ist die Geschwindigkeitsverteilung für verschiedene Werte von $v_0 a/\nu$ aufgetragen.

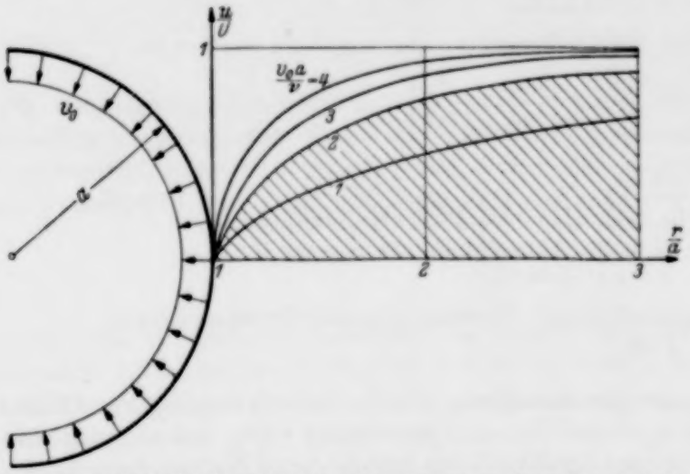

Abb. 2. Geschwindigkeitsprofile der u-Komponente an einem Kreiszylinder bei gleichmäßiger Absaugung. Im schraffierten Bereich haben die Geschwindigkeitsprofile unendlich große Verdrängungsdicke.

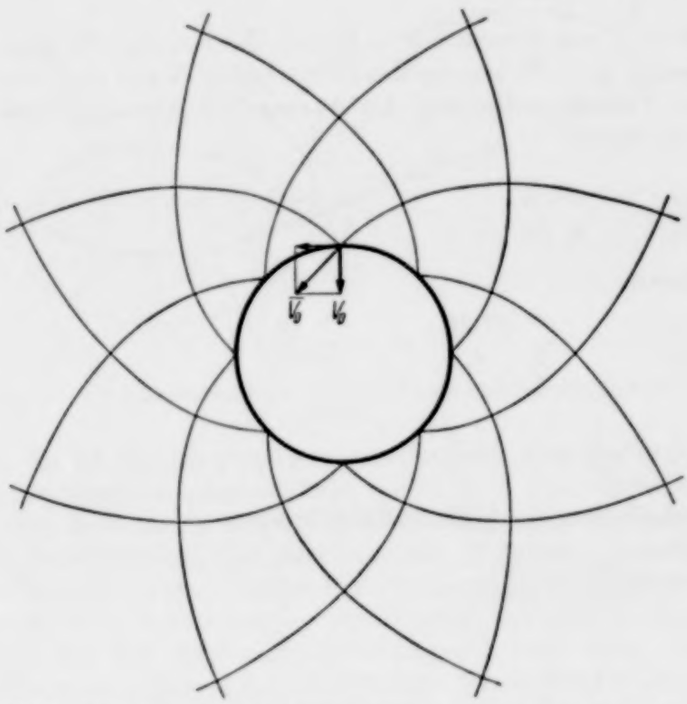

Abb. 3. Koordinatennetz bei einem rotierenden Kreiszylinder mit gleichmäßiger Absaugung ($\gamma = \pi/4$).

Das je Einheit der Zylinderlänge verdrängte Flüssigkeitsvolumen ist gegeben durch

$$\Delta Q = \int_a^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) 2\pi r \, dr$$

$$= \begin{cases} \infty & \text{für } \frac{v_0 a}{\nu} \leqq 2 , \\ \frac{2\pi a^2}{\frac{v_0 a}{\nu} - 2} & \text{für } \frac{v_0 a}{\nu} > 2 . \end{cases} \tag{12}$$

Wenn wir uns das verdrängte Flüssigkeitsvolumen auf einen Ringraum mit dem Außenhalbmesser a_1 konzentriert denken, können wir eine Verdrängungsdicke der Grenzschicht

$$\delta = a_1 - a$$

definieren. Nun ist aber

$$\Delta Q = \pi (a_1^2 - a^2) = \frac{2\pi a^2}{\frac{v_0 a}{\nu} - 2} ,$$

so daß

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta}{a} &= \sqrt{1 + \frac{2}{\frac{v_0 a}{\nu} - 2}} - 1 \\ &\text{für } \frac{v_0 a}{r} > 2 . \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

In Abb. 2 sind diejenigen Geschwindigkeitsprofile, die zu unendlich großer Verdrängungsdicke führen, schraffiert.

b) Rotierender Kreiszylinder. Wir setzen hier

$$\eta + i\zeta = (1 + i\gamma) \ln (x + iy)$$
$$= (1 + i\gamma) \ln r e^{i\Theta} ,$$

so daß

$$\eta = \ln r - \gamma \Theta , \quad \zeta = \gamma \ln r + \Theta \tag{14}$$

und

$$H = \frac{r}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \tag{15}$$

wird. Das Stromliniennetz, das logarithmischen Spiralen entspricht, ist in Abb. 3 aufgetragen für $\gamma = \pi/4$. Für $F = v\,H$ ist an der Zylinderwandung offenbar (vgl. Abb. 3)

$$v = -\bar{v}_0 = -v_0 \sqrt{1 + \gamma^2}$$

und demnach $F = v_0 a$. Die Zylinderwand ist durch $r = a$ gegeben, so daß die Lösung (6)

$$u = \text{konst.}\, e^{(\alpha + \beta) \ln r + (\beta - \alpha\gamma)\Theta} + \text{konst.}$$

nur dann mit den Randbedingungen vereinbar ist, wenn

$$\beta - \alpha\,\gamma = 0$$

ist. Dann ist aber wegen (7)

$$F = v\,(1 + \gamma^2)\,\alpha\,,$$

und die u-Komponente ist gegeben durch

$$\frac{u}{U} = 1 - e^{\left[F \ln \frac{r}{a}\right]/v} = 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{-v_0 a}{v}}\,. \tag{16}$$

Die u-Verteilung wird also durch die Rotation gar nicht beeinflußt.

c) Elliptischer Zylinder. Wir wählen hier

$$x = c\,\mathfrak{Cof}\,\eta\,\cos\zeta\,, \qquad y = c\,\mathfrak{Sin}\,\eta\,\sin\zeta\,, \tag{17}$$

$$H = c\sqrt{\frac{\mathfrak{Cof}\,2\,\eta - \cos 2\,\zeta}{2}}\,. \tag{18}$$

Wenn $\eta = \eta_0$ die elliptische Wandung darstellt, muß also wegen $v\,H = F =$ konst. die Absaugegeschwindigkeit verteilt sein wie

$$v_0 = \frac{F}{c}\sqrt{\frac{\mathfrak{Cof}\,2\,\eta_0 - \cos 2\,\zeta}{2}}\,. \tag{19}$$

Nun ist aber der Krümmungshalbmesser ϱ einer Ellipsenkurve $\eta = \eta_0$ im Punkt ζ, wenn a und b die große und die kleine Halbachse bezeichnen,

$$\begin{aligned}\varrho &= a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{3/2} \\ &= c\,\mathfrak{Cof}^2\,\eta_0\,\mathfrak{Sin}^2\,\eta_0 \left(\frac{\cos^2\zeta}{\mathfrak{Cof}^2\,\eta_0} + \frac{\sin^2\zeta}{\mathfrak{Sin}^2\,\eta_0}\right)^{3/2} \\ &= c\,\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\eta_0\,\mathfrak{Cof}\,\eta_0}\left(\frac{\mathfrak{Cof}\,2\,\eta_0 - \cos 2\,\zeta}{2}\right)^{3/2} = \frac{H^3}{a\,b}\,.\end{aligned}$$

Demnach muß die Absaugegschwindigkeit verteilt sein wie:

$$v_0 = \frac{F}{\sqrt[3]{\varrho\,a\,b}}\,, \tag{19a}$$

also umgekehrt proportional der dritten Wurzel des Krümmungshalbmessers und nicht mehr gleichmäßig wie in den vorhergegangenen Fällen. Die Gesamtabsaugemenge ist gegeben durch

$$Q = \int_{-\pi}^{\pi} v\,H\,d\zeta = 2\,\pi\,F\,.$$

Die u-Verteilung ist offenbar bestimmt durch

$$\frac{u}{U} = 1 - e^{\frac{-F}{v}(\eta - \eta_0)}\,, \tag{20}$$

und das gesamte verdrängte Flüssigkeitsvolumen je Längeneinheit des Zylinders ist

$$\Delta Q = \int_{\eta_0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 - \frac{u}{U}\right) H^2\,d\eta\,d\zeta\,.$$

Die Ausführung der Integration ergibt

$$\Delta Q = \pi\,c^2\,\frac{\mathfrak{Cof}\,2\,\eta_0\,(F/v) + 2\,\mathfrak{Sin}\,2\,\eta_0}{(F/v)^2 - 4}\,.$$

Da die Linien konstanter u-Geschwindigkeit konfokale Ellipsen sind, muß auch die Verdrängungsdicke eine zur Wandellipse konfokale Ellipse bilden, deren große und kleine Halbachse wir mit a_1, b_1 bezeichnen (Wandellipse a, b). Es muß dann offenbar gelten

$$\Delta Q = \pi\,(a_1\,b_1 - a\,b)\,.$$

Bei Beachtung von $b_1 = \sqrt{a_1^2 - c^2} = \sqrt{a_1^2 - a^2 + b^2}$ und $a = c\,\mathfrak{Cof}\,\eta_0$, $b = c\,\mathfrak{Sin}\,\eta_0$ erhält man schließlich

$$\frac{a_1}{a}\sqrt{\left(\frac{a_1}{a}\right)^2 - 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{b}{a} + \frac{[1 + (b/a)^2]\,F/\nu + 4\,b/a}{(F/\nu)^2 - 4}\,. \tag{21}$$

Im Grenzfall $b/a = 1$ erhalten wir wieder das gleiche Ergebnis wie beim Kreiszylinder. Wie beim Kreiszylinder ist auch hier $F/\nu = 2$ eine Grenze, an und unterhalb der die Grenzschichtdicke keinen endlichen reellen Wert hat.

d) Strömung längs zweier sich schneidender Ebenen. Wir benützen hier die Abbildungsfunktion

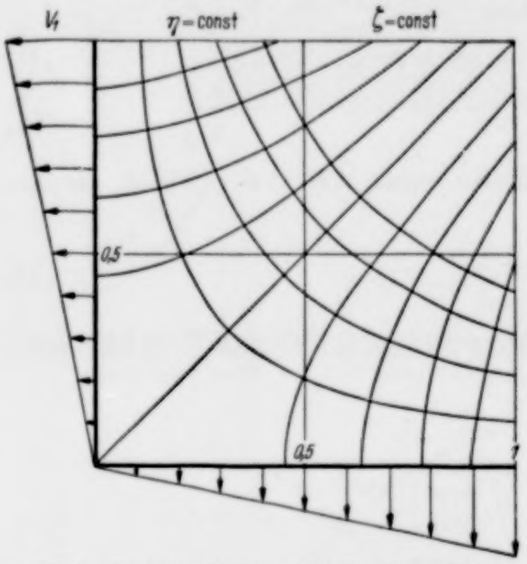

Abb. 4. Koordinatensystem für die Grenzschichtströmung längs zweier sich rechtwinklig schneidender Ebenen bei linear zunehmender Absaugegeschwindigkeit.

$$\eta + i\zeta = -\frac{i\,\gamma}{\pi}\left(\frac{Z}{l}\right)^{\pi/\gamma} = -\frac{i\,\gamma}{\pi}\left(\frac{r}{l}\right)^{\pi/\gamma} e^{i\,\vartheta\,\pi/\gamma} \tag{22}$$

mit

$$\eta = \frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{r}{l}\right)^{\pi/\gamma} \sin\frac{\vartheta\,\pi}{\gamma} \tag{22a}$$

$$\zeta = -\frac{\gamma}{\pi}\left(\frac{r}{l}\right)^{\pi/\gamma} \cos\frac{\vartheta\,\pi}{\gamma} \tag{22b}$$

und dem Maßstabsfaktor

$$H = l\left(\frac{r}{l}\right)^{1-\pi/\gamma}\,. \tag{23}$$

Hierbei ist γ der Winkel zwischen beiden Ebenen und l ein noch unbestimmtes Längenmaß. In Abb. 4 ist der Fall $\gamma = \pi/2$ dargestellt. Hierbei ist

$$\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin 2\,\vartheta \tag{24}$$

und

$$H = \frac{l^2}{r}\,. \tag{25}$$

Die Absaugegeschwindigkeit an der Wand ist verteilt wie $v_0 = -\,r\,F/l^2$, so daß $dv_0/dr = F/l^2$ ist. Damit wird die u-Geschwindigkeitsverteilung

$$\frac{u}{U} = 1 - e^{\frac{F\eta}{\nu}} = 1 - e^{-\frac{1}{2}\frac{dv_0}{dr}\frac{l^2}{\nu}\left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2\vartheta}\,. \tag{26}$$

Die Linien konstanter u-Geschwindigkeit sind hier gleichseitige Hyperbeln und wir können eine Verdrängungshyperbel $\eta_{/1}$ definieren, indem wir zunächst die Verdrängungsdicke in einem endlichen ζ Bereich berechnen und dann die Integrationsgrenze $\zeta_0 \to \infty$ gehen lassen. Mit $F/\nu = -\,\alpha$ ist η_1 also definiert durch

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\zeta_0\to\infty}\int_0^{\eta_0}\int_0^{\zeta_0} H^2\,d\eta\,d\zeta = \lim_{\zeta_0\to\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\zeta_0} H^2\,e^{-\alpha\,\eta}\,d\eta\,d\zeta\,, \\ &\lim_{\zeta_0\to\infty}\left\{\frac{l^2}{2}\left[\eta_{/1}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\zeta_0}{\eta_{/1}} - \sqrt{\zeta_0^2 + \eta_{/1}^2} + \zeta_0\right]\right\} = \lim_{\zeta_0\to\infty}\frac{l^2}{2}\int_0^{\infty} e^{-\alpha\,\eta}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,\frac{\zeta_0}{\eta}\,d\eta\,. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Der Grenzübergang führt auf

$$\eta_{/1} = \frac{1}{\alpha}\,. \tag{28}$$

Der Abstand r_1 des Scheitelpunktes der Verdrängungshyperbel vom Eckpunkt ist daher

$$r_1 = l\sqrt{2\,\eta_{/1}} = l\sqrt{\frac{2\,\nu}{-F}} = \sqrt{\frac{2\,\nu}{dv_0/dr}}\,. \tag{28a}$$

e) Gekerbte oder wellige Wand. Wir gehen aus von der Abbildungsfunktion

$$\eta + i\zeta = \ln\sin\frac{\pi\,z}{2\,l}\,, \tag{29}$$

die einer unendlichen Folge von Senkenlinien entspricht, wobei $2\,l$ der Abstand der einzelnen Senkenlinien voneinander ist. Durch Zerlegen in Real- und Imaginärteil findet man

$$\eta = \ln \frac{1}{2}\,(\mathfrak{Cof}\,\bar{y} - \cos \bar{x})\,, \qquad \zeta = \arccos \frac{\sin \frac{1}{2}\,\bar{x}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{1}{2}\,\bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{2}\,(\mathfrak{Cof}\,\bar{y} - \cos \bar{x})}}\,, \tag{30}$$

wenn $\bar{y} = y\,\pi/l$ und $\bar{x} = x\,\pi/l$ ist. Der Maßstabsfaktor ist

$$H = \frac{\mathfrak{Cof}\,\bar{y} - \cos \bar{x}}{\mathfrak{Cof}\,\bar{y} - \cos \bar{x}}\,. \tag{31}$$

Abb. 5 zeigt das so gewonnene Koordinatennetz. Wählt man als Wandkontur $\eta = \eta_0 = \text{konst.}$, so entspricht

$\eta_0 < 0{,}346$ einer unendlichen Folge von längsangeströmten ovalen Zylindern mit Absaugung,
$\eta_0 = 0{,}346$ einer gekerbten Wand,
$\eta_0 > 0{,}346$ einer welligen Wand.

Die Absaugegeschwindigkeit ist jeweils wie $v_0 = -\,F/H$ verteilt. Die u-Geschwindigkeitsverteilung lautet

$$\frac{u}{U} = 1 - e^{\frac{F}{\nu}(\eta - \eta_0)} = 1 - e^{-\frac{F\,\eta_0}{\nu}} \cdot e^{\frac{F}{\nu} \ln \sqrt{\frac{1}{2}\,(\mathfrak{Cof}\,\bar{y} - \cos x)}}\,. \tag{32}$$

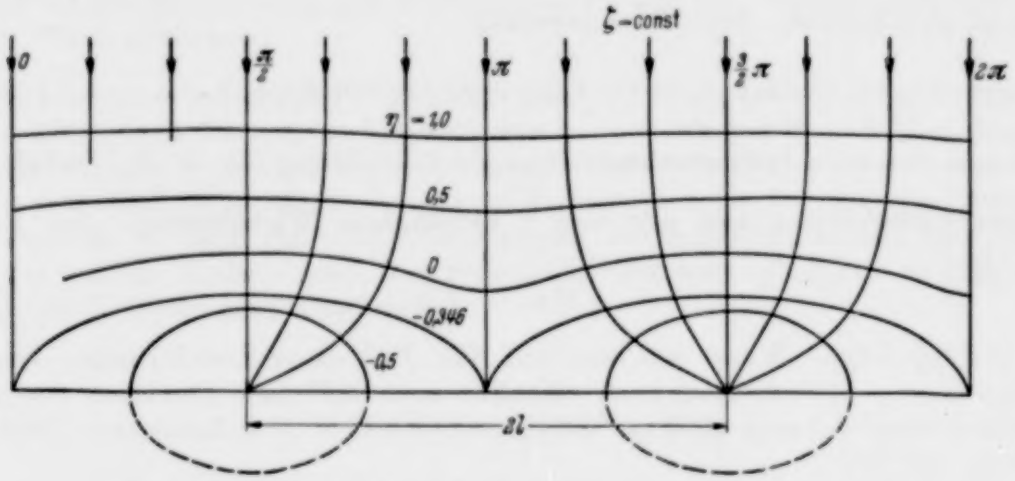

Abb. 5. Senkenreihe zur Darstellung einer gekerbten oder welligen Wand.

4. Absaugegrenzschichten konstanter Wirbelstärke. Auch bei Annahme von $\omega = \omega_0 = \text{konst.}$ ist die Gleichung (6) ohne weiteres erfüllt und man erkennt, daß wirbelfreie Lösungen und solche mit konstanter Wirbelstärke für die v, w-Komponenten linear überlagert werden können. Wir erhalten somit nach (1) und (5) das Gleichungssystem

$$\frac{\partial (v\,H)}{\partial \eta} + \frac{\partial (w\,H)}{\partial \zeta} = 0\,, \tag{33}$$

$$\frac{\partial (w\,H)}{\partial \eta} - \frac{\partial (v\,H)}{\partial \zeta} = 2\,\omega_0\,H^2\,. \tag{34}$$

Wir beschränken uns im Folgenden auf die Fälle des Kreiszylinders und des elliptischen Zylinders.

a) Kreiszylinder. Im Fall einer zylindrischen Begrenzung wählen wir wieder $\eta = \ln r$, $H = r = e^{\eta}$, und Lösungen der Gleichungen (33) und (34) lauten

$$\left.\begin{aligned} v\,H &= \text{konst.} = F\,, \\ w\,H &= \omega_0\,e^{2\,\eta} + \text{konst.}\,, \end{aligned}\right\}$$

also

$$\left.\begin{aligned} w &= \omega_0\,r + \frac{1}{r}\,\text{konst.}\,. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Die Gleichung (2) für die u-Komponente läßt sich lösen durch den Ansatz

$$u = 1 - e^{\frac{F\eta}{\nu}},$$

der auch die Randbedingungen erfüllt. Ein Vergleich mit (11) zeigt, daß die u-Verteilung genau gleich wie im wirbelfreien Fall ist und nur von der Absaugemenge abhängt.

b) Elliptischer Zylinder. Wählen wir wieder die durch (17a) und (17b) gegebenen elliptischen Koordinaten, so ist

$$H^2 = \frac{c^2}{2}(\mathfrak{Cof}\, 2\eta - \cos 2\zeta).$$

Lösungen der Gleichungen (33) und (34) sind in diesem Fall gegeben durch

$$v H = C_1 + \frac{c^2}{2}\omega_0 \sin 2\zeta, \qquad w H = C_2 + \frac{c^2}{2}\omega_0\, \mathfrak{Sin}\, 2\eta. \tag{37}$$

Für große Werte von η geht dies wieder in eine starre Drehung über wie im vorhergehenden Fall. Im Gegensatz zum Kreiszylinder ist aber die Verteilung der Absaugegeschwindigkeit von der Drehung abhängig. Dementsprechend ist auch die u-Verteilung von der Drehung abhängig und als Lösung der Differentialgleichung

$$\left(C_1 + \frac{c^2}{2}\omega_0 \sin 2\zeta\right)\frac{\partial u}{\partial \eta} + \left(C_2 + \frac{c^2}{2}\omega_0\, \mathfrak{Sin}\, 2\eta\right)\frac{\partial u}{\partial \zeta} = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\right) \tag{38}$$

gegeben. Es ist zweckmäßig, den Lösungsansatz

$$\frac{u}{U} = 1 + e^{-\alpha\eta} A_1(\zeta) + e^{-(\alpha+2)\eta} A_2(\zeta) + \cdots \tag{39}$$

zu wählen, durch den man Differentialgleichungen 1. Ordnung für die $A_i(\zeta)$ erhält.

5. Absaugegrenzschichten mit nur von η abhängiger Wirbelstärke. Im Fall $\omega = \omega(\eta)$ geht (6) über in

$$v H \omega' = \nu \omega'', \tag{40}$$

woraus $v H = F(\eta)$ folgt. Wenn wir uns auf den Fall einer kreisförmigen Begrenzung beschränken und $H = r = e^{\eta}$ setzen, muß offenbar auch $w H$ eine Funktion von η allein sein, und die Kontinuitätsgleichung wird nur erfüllt, wenn $v H = F =$ konst. ist. Dann findet man aber als Lösung von (40)

$$\omega = \omega_0 e^{\frac{F\eta}{\nu}}, \tag{41}$$

und man erhält

$$w H = \frac{2\omega_0}{F/\nu + 2} e^{(F/\nu + 2)\eta} + \text{konst.}, \tag{42}$$

was auch geschrieben werden kann

$$w = \frac{2\omega_0}{2 - \frac{v_0 a}{\nu}} r^{1 - \frac{v_0 a}{\nu}} + \frac{\text{konst.}}{r}.$$

Wenn nur $-F/\nu > 1$ ist, so klingt w für große r immer ab und man kann mit der Lösung (42) sowohl $w = 0$ als auch $w =$ konst. für $r = a$ befriedigen. Da wir vorher bereits unter gleichen Bedingungen an der Wand und im Unendlichen die Lösung $w = 0$ im ganzen Strömungsfeld erhalten hatten, bestimmen offenbar in einem ringförmigen Strömungsfeld die Randbedingungen nicht eindeutig die Lösung. Vielmehr können Wirbelströmungen überlagert werden. Für die u-Komponente erhält man wieder die durch (11) gegebene Verteilung.

6. Absaugegrenzschichten mit nur von ζ abhängiger Wirbelstärke. Im Fall $\omega = \omega(\zeta)$ geht (6) über in

$$w H \omega' = \nu \omega'', \tag{43}$$

wobei die Striche jetzt Ableitungen nach ζ bezeichnen. Offenbar muß jetzt $w\,H = G(\zeta)$ sein, so daß aus der Kontinuitätsgleichung folgt

$$v\,H = \eta\,G'(\zeta) + F(\zeta)\,.$$

Durch Einsetzen in (5) ergibt sich

$$\eta\,G'' + F' = -\,2\,H^2\,\omega(\zeta)\,. \tag{44}$$

Offenbar ist nur im Fall rechtwinkliger Koordinaten, also für $H = 1$ ein sinnvolles Ergebnis zu erwarten. Um (44) zu erfüllen, muß $G'' = 0$ sein. Da w nur eine Funktion von ζ allein ist, an der Wand (η = konst.) aber verschwindet, muß w im ganzen Strömungsfeld gleich Null sein. Wegen (43) ist dann $\omega'' = 0$, und aus (44) folgt $F''' = 0$, also $F = a + b\,\zeta + c\,\zeta^2$. Dies entspricht aber einer *Poiseuille*-Strömung. Durch Koordinatenverschiebung kann das in z lineare Glied zum Verschwinden gebracht werden. Wir können also $b = 0$ voraussetzen. Für das Druckfeld erhält man nach (3) und (4)

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial \eta} = 2\,\nu\,c\,, \qquad \frac{\partial p}{\partial \zeta} = 0\,,$$

also

$$p = \text{konst.} + 2\,\mu\,c\,\eta\,.$$

Zur Lösung der Gleichung (2) für die u-Komponente kann man den Ansatz

$$\frac{u}{U} = 1 - e^{-\alpha\,\eta}\,[(F_0(\eta) + \zeta^2\,F_2(\eta) + \zeta^4\,F_4(\eta) + \cdots] \tag{45}$$

machen. Doch ist die Berechnung der Funktionen F_i und die Befriedigung der Randbedingungen an der Wand mühsam.

7. Spezielle Lösungen, bei denen die Querbewegung die Strombahnen einer Potentialströmung besitzt. Wir suchen nach Lösungen, für die zwar $w = 0$, aber $v\,H = F(\zeta) \neq$ konst. ist. Die Querströmung soll also zwar den Bahnen einer Potentialströmung folgen, ohne aber selbst eine solche zu sein. Die Möglichkeit derartiger Strömungen ist bereits von *Hamel* [1] mit dem Ergebnis untersucht worden, daß nur Strömungen auf logarithmischen Spiralen (mit den Grenzfällen der reinen Radial- und der reinen Kreisströmung) diese Bedingung erfüllen. Die umgeformten Gleichungen (3) und (4)

$$\frac{F^2}{2}\frac{\partial\left(\frac{1}{H^2}\right)}{\partial \eta} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial \eta} + \nu\,\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{F'}{H^2}\right), \tag{46}$$

$$\frac{F^2}{2}\frac{\partial\left(\frac{1}{H^2}\right)}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial \zeta} - \nu\,\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{F'}{H^2}\right) \tag{47}$$

können zusammengefaßt werden in

$$F\frac{\partial\left(\frac{F'}{H^2}\right)}{\partial \eta} = \nu\left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\left(\frac{F'}{H^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\left(\frac{F'}{H^2}\right)\right] \tag{48}$$

mit $H = r/\sqrt{1+\gamma^2}$ und $\ln r = (\eta + \gamma\,\zeta)/(1+\gamma^2)$ vgl. (15) und (14) folgt dann aber

$$-\,2\,F\,F' = \nu\,[4\,F' + F'''\,(1+\gamma^2) - 4\,\gamma\,F'']\,. \tag{49}$$

Wenn wir uns weiterhin auf die Radialströmung ($\gamma = 0$) beschränken, ist die Lösung nach *Hamel* durch elliptische Funktionen gegeben.

Die Differentialgleichung (2) für u läßt sich umschreiben in

$$F\frac{\partial u}{\partial r}\,r = \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\,r^2 + \frac{\partial u}{\partial r}\,r + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\right). \tag{50}$$

Mit dem Lösungsansatz

$$u_n = r^n\,f_n(\zeta)$$

[1] *G. Hamel*, Jahresber. Dtsch. Math. Vereinig. 25 (1916) S. 34.

erhält man für f_n die Differentialgleichung

$$f_n'' - n\left(\frac{F}{\nu} - n\right) f_n = 0 \,. \tag{51}$$

Da F/ν eine in ζ periodische Funktion ist, handelt es sich offenbar um eine *Hill*sche Differentialgleichung. Für $n = -2$ lautet eine spezielle Lösung $f_n = F'$. Wir betrachten folgende beiden Aufgaben.

a) Kreiszylinder mit ungleichförmiger (aber nicht willkürlicher) Verteilung der Absaugegeschwindigkeit. Wir können hier für die Lösung den Reihenansatz

$$\frac{u}{U} = 1 - \sum_{n=-1}^{\infty} c_n r^n f_n$$

machen. Da die f_n selbst wieder periodische Funktionen sind, können sie in eine *Fourier*reihe entwickelt werden, und die c_n können sicherlich so gewählt werden, daß für $r = a$ (Zylinderoberfläche) alle periodischen Glieder sich gegenseitig aufheben und die konstanten Glieder die Summe 1 ergeben. Das Problem ist also offenbar lösbar.

b) Strömung im Winkelraum zweier Ebenen mit Absaugung in der Schnittgeraden. Für die radiale Senkenströmung zwischen ebenen Wänden sind von *Hamel* Lösungen entwickelt worden, welche die Randbedingungen für die Querströmung erfüllen. Man erkennt jedoch leicht, daß es nicht möglich ist, hierzu eine u-Strömung zu finden, die für genügend großen Abstand von den Wänden in den konstanten Wert $u = U$ übergeht und die Haftbedingung an der Wand erfüllt.

8. Nachbarlösungen zur wirbelfreien Querbewegung. Im Folgenden sollen Nachbarlösungen zu $v\,H = F_0 = \text{konst.}$; $w\,H = 0$ untersucht werden. Dabei interessieren vor allem geschlossene Körper, bei denen die Abweichungen $\Delta(v\,H)$ von der wirbelfreien Verteilung in eine *Fourier*reihe zerlegt werden können. Zunächst liefert schon die Annahme $\omega = 0$ periodische Lösungen der Form

$$\Delta(v\,H)_1 = \sum_n C_n e^{-n(\eta - i\zeta)} \,, \qquad \Delta(w\,H)_1 = -i \sum_n C_n e^{-n(\eta - i\zeta)} \,, \tag{52}$$

mit denen aber die Randbedingung $w = 0$ an der Wand nicht erfüllt werden kann. Unter der Annahme, daß die Abweichungen von der Grundlösung $v\,H = F_0$ nur gering sind, gewinnen wir näherungsweise weitere Lösungen dadurch, daß wir in der Differentialgleichung (6) quadratische Glieder der Abweichungen vernachlässigen und somit die linearisierte Differentialgleichung

$$\frac{F_0}{\nu} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} \tag{53}$$

gewinnen, deren Lösungen wir in der Form

$$\omega = \sum_n \omega_n e^{-\lambda_n \eta + i n \zeta} \tag{54}$$

ansetzen mit

$$\lambda_n = \frac{F_0}{2\nu} + \sqrt{\left(\frac{F_0}{2\nu}\right)^2 + n^2} \,.$$

Aus (1) und (5) kann man dann $v\,H$ und $w\,H$ berechnen. Diese Lösung soll auf den Fall des Kreiszylinders angewandt werden.

Wegen $H^2 = e^{2\eta}$ findet man aus (54), (1) und (5)

$$\left.\begin{aligned} \Delta(v\,H)_2 &= -\sum_n \frac{2\,n\,i}{(-\lambda_n + 2)^2 - n^2}\, \omega_n e^{(-\lambda_n + 2)\eta + i n \zeta} \,, \\ \Delta(w\,H)_2 &= \sum_n \frac{2\,(-\lambda_n + 2)}{(-\lambda_n + 2)^2 - n^2}\, \omega_n e^{(-\lambda_n + 2)\eta + i n \zeta} \,. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Aus der Zusammenfassung von (52) und (55) bei Beachtung der Bedingung $w = 0$ für $\eta = \eta_0$ findet man

$$\left.\begin{aligned} \Delta(v\,H) &= \sum_n C_n \left[e^{-n\,\eta} + \frac{n}{(-\lambda_n + Z)}\, e^{-n\,\eta_0 + (-\lambda_n + 2)(\eta - \eta_0)} \right] e^{i\,n\,\zeta}\,, \\ \Delta(w\,H) &= \sum_n -i\,C_n \left[e^{-n\,\eta} - e^{-n\,\eta_0 + (-\lambda_n + 2)(\eta - \eta_0)} \right] e^{i\,n\,\zeta}\,. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Die C_n bestimmen sich aus der vorgegebenen Verteilung von v an der Wand[1]. Für $\lambda_n = 2 + n$ oder $F_0/\nu = (4 + 4\,n)/(2 - n)$ verschwindet übrigens das betreffende Teilglied von $w\,H$ für alle η. Eine nur durch dieses Teilglied hervorgerufene Störung klingt nach außen ab wie

$$\Delta(v\,H) = C_n\, e^{-n\,(\eta - \eta_0) + i\,n\,\zeta} \tag{57}$$

oder mit $r = i\,n\,\eta$

$$\Delta(v\,r) = C_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \cos n\,\zeta\,.$$

Wir zerlegen auch die u-Verteilung in eine Grundverteilung u_0 und eine Störungsverteilung Δu. Mit dem gleichen Grad der Annäherung gilt dann

$$F_0\,\frac{\partial \Delta u}{\partial \eta} = \nu \left(\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial \zeta^2} \right) - \Delta(v\,H)\,\frac{\partial u_0}{\partial \eta}\,. \tag{58}$$

Die homogene Gleichung (d. h. ohne das letzte Glied) hat die gleiche Form wie (53) und also auch entsprechende Lösungen. Für die inhomogene Gleichung machen wir den Ansatz

$$\Delta u_i = \left[D_n\, e^{-n\,\eta} + E_n \frac{n}{-\lambda_n + 2}\, e^{-n\,\eta_0 + (-\lambda_n + 2)(\eta - \eta_0)} \right] \frac{F_0}{\nu}\, e^{\frac{F_0}{\nu}(\eta - \eta_0) + i\,n\,\zeta}\,. \tag{59}$$

Die Konstanten D_n und E_n bestimmen wir durch Einsetzen dieses Ansatzes in die Differentialgleichung, wobei wir $\Delta(v\,H)$ aus (56) entnehmen und $\partial u_0/\partial \eta = -(F_0/\nu)\, e^{\eta_0 - \eta}$ berücksichtigen. Wir finden

$$D_n = \frac{C_n}{F_0\,n} \quad \text{und} \quad E_n = -\frac{C_n}{F_0\,(-\lambda_n + 2) + \nu\,[(-\lambda_n + 2)^2 - n^2]}\,.$$

Insgesamt erhält man also als Lösung für die Störgeschwindigkeiten Δu

$$\Delta u = \sum_n \frac{C_n}{F_0\,n} \left[e^{-n\,\eta} - \frac{n^2}{(-\lambda_n + 2)\left\{(-\lambda_n + 2) + \frac{\nu}{F_0}\,[(-\lambda_n + 2)^2 - n^2]\right\}}\, e^{-n\,\eta_0 + (-\lambda_n + 2)(\eta - \eta_0)} \right]$$
$$\times \frac{F_0}{\nu}\, e^{\frac{F_0}{\nu}(\eta - \eta_0) + i\,n\,\zeta} + K_n\, e^{-\lambda_n (\eta - \eta_0) + i\,n\,\zeta}\,,$$

wobei die Konstanten K_n aus dem Verschwinden für $\eta = \eta_0$ bestimmt werden, während die C_n wie oben durch die Verteilung der Absaugegeschwindigkeit an der Wand (vgl. Formel (39)) gegeben sind.

Bei einer speziellen Störung, welche der Bedingung (40) genügt, ist

$$\Delta u = 0\,.$$

9. Zusammenfassung. Die Untersuchung bezieht sich auf die Strömung längs einer unendlich langen zylindrischen Fläche, an deren Oberfläche die Grenzschichten laufend abgesaugt werden. Die Geschwindigkeitskomponenten sollen nicht von der Koordinate in Achsrichtung abhängen und in großem Abstand von der Zylinderfläche in eine gleichmäßige Parallelströmung in Richtung der Zylinderachse übergehen. Aus den allgemeinen Differentialgleichungen dieses Problems lassen sich verschiedene Sonderfälle heraussondern. Bei Verschwinden der Wirbelkomponente in Hauptströmungsrichtung ergeben sich einfache Lösungen, die als Verallgemeinerung der homogenen Absaugegrenzschicht an einer ebenen Wand aufgefaßt werden können. Als Anwendungen werden u. a. die Strömung längs eines ruhenden und rotierenden Kreiszylinders, eines elliptischen Zylinders sowie im Winkelraum zweier sich schneidender

[1] Dieser Sonderfall ist auf eine etwas andere Weise bereits von *G. Hamel* a. a. O. untersucht worden.

Ebenen behandelt. Nachbarlösungen hierzu werden durch Linearisierung der Differentialgleichungen gewonnen. Weitere weniger einfache Sonderfälle ergeben sich dadurch, daß man die Wirbelkomponente in Hauptströmungsrichtung als konstant oder nur von einer Veränderlichen abhängig voraussetzt. Schließlich sind noch spezielle Lösungen möglich, bei denen die Querströmung eine *Hamel*sche spiralförmige Strömung ist.

Die untersuchten Fälle lassen folgendes vermuten:

1. Bei einem im Endlichen geschlossenen zylindrischen Körper (z. B. elliptischer Zylinder) und endlicher Absaugemenge (je Längeneinheit des Zylinders) existieren asymptotische Lösungen für die u-Komponente der Strömungsgeschwindigkeit in Richtung der Zylinderachse, welche die Haftbedingung an der Wand erfüllen und in genügenden Abstand von der Wand in eine konstante Parallelströmung ($u = U$) übergehen. Die mit diesen Randbedingungen gewonnenen Lösungen sind jedoch nicht eindeutig, weil noch Wirbelströmungen überlagert werden können.

2. Bei einem offenen zylindrischen Körper, dessen Flächen sich ins Unendliche erstrecken (z. B. zwei sich schneidende Ebenen), existieren asymptotische Lösungen mit den vorhergenannten Eigenschaften nur dann, wenn nicht unendlich große Teilabschnitte der Oberfläche je Längeneinheit des Zylinders frei von Absaugung sind. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Grenzschicht nicht in anderer Weise Energie zugeführt erhält (z. B. durch Druckgefälle in Richtung der Zylinderachse oder durch eine bewegte Wand).

(Eingegangen am 2. August 1954.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *W. Wuest*, Göttingen, Bunsenstr. 10.

Über den Auftrieb eines Blasflügels.

Von H. B. Helmbold.

1. Zirkulationsauftrieb und Impulsauftrieb. Wird ein Strahl aus einem Blasschlitz tangential zur Flügeloberfläche nach hinten geblasen, so entsteht über den ohne Strahl bereits vorhandenen Auftrieb hinaus ein Zusatzauftrieb. Der Gesamtauftrieb besteht dabei im allgemeinen Fall aus zwei verschiedenartigen Anteilen, dem Zirkulationsauftrieb A_Γ, der für das Auftreten von freien Längswirbeln in der Strömung hinter dem Flügel und einen entsprechenden induzierten Widerstand verantwortlich ist, und dem Impulsauftrieb A_J, der die Reaktion für die sehr weit hinter dem Flügel übrigbleibende Abwärtskomponente des Impulsstroms im Strahl selbst darstellt und dessen Erzeugung mit einem negativen Widerstand, dem Blasschub, verbunden ist. Eine Abschätzung dieser Anteile auf Grund von Impulsbetrachtungen [1] zeigt, daß der Gesamtauftrieb reiner Zirkulationsauftrieb ist und der Impulsauftrieb verschwindet, wenn die Spannweite gegen Unendlich geht, womit man zur ebenen Strömung gelangt; dabei wird der Blasstrahl, der den Flügel unter einem Winkel δ_H gegen die Anblasrichtung verlassen hat, von der umgebenden Strömung schließlich vollständig in die Richtung der ungestörten Strömung umgelenkt.

2. Der Blasflügelauftrieb in ebener Strömung. Nun lehrt die Erfahrung, daß der Zusatzauftrieb ΔA eines Blasflügels in ebener Strömung ein Vielfaches N der Abwärtskomponente

$$\Delta J_y = \varrho\, b\, h\, [(V + v)^2 - V^2] \sin \delta_H \tag{1}$$

des Impulsüberschusses im Strahl an der Hinterkante beträgt (ϱ = Luftdichte, b = Spannweite, h = Dicke des Blasstrahls, V = Geschwindigkeit dicht außerhalb des Strahls, v = Übergeschwindigkeit im Strahl). Beispielsweise ergibt die Auswertung einer von *P. Rebuffet* [2] veröffentlichten Versuchsreihe [3] für den Vergleichsfaktor N einen Wert nahe an 5. Durch die Umlenkung des Strahls in die Anblasrichtung wird also bedeutend mehr Zusatzauftrieb erzeugt als dem ursprünglich erzeugten Abwärtsimpuls ΔJ_y unmittelbar entspricht. Um das erklären zu können, fragt man am besten zuerst einmal nach den Kräften, die den Strahl umlenken und damit den ursprünglichen Abwärtsimpuls ΔJ_y abfangen. Das können nur zusätzliche Druckkräfte sein, die die umgebende Strömung („Grundströmung") auf die Oberfläche des Blasstrahls ausübt, Druckkräfte von der gleichen Art wie der Auftrieb am Tragflügel. Es muß also, wenn wir den Blasstrahl als Fremdkörper betrachten, in der Grundströmung über den Blasstrahl hinweg noch ein Drucksprung vorhanden sein, der wegen der Konstanz des Gesamtdrucks in der Grundströmung von einem entsprechenden Geschwindigkeitssprung begleitet ist:

Abb. 1. Ebene Platte mit Blasstrahl aus der Hinterkante (schematisch).

$$p_2 - p_1 = \varrho \frac{V_1 + V_2}{2} (V_1 - V_2)\,, \tag{2}$$

oder, wenn wir mit V_∞ als ungestörter Geschwindigkeit und mit ΔV als Übergeschwindigkeit

$$\frac{V_1 + V_2}{2} = V_\infty + \Delta V \quad \text{und} \quad V_1 - V_2 = \varepsilon \tag{3}$$

schreiben,

$$p_2 - p_1 = \varrho\, (V_\infty + \Delta V)\, \varepsilon\,. \tag{4}$$

Die Bezeichnungen der Gleichung (2) sind durch Abb. 1 erklärt, die den einfachsten Fall, die ebene Platte mit Blasstrahl aus der Hinterkante, illustriert. Den Geschwindigkeitssprung ε

[1] *H. B. Helmbold*, On the Lift of a Blowing, University of Wichita, Engineering Study No. 135, April 1954.

[2] *P. Rebuffet*, Aérodynamique expérimentale, S. 461, 2. Aufl., Paris et Liége 1950.

[3] Bei diesen Versuchen wurde die Blasluft einem gegenüber dem Flügel ruhenden Luftraum entnommen. Bei den folgenden Überlegungen ist angenommen, daß die Blasluft der Strömung entnommen wird und mit der Geschwindigkeit V in den Flügel eintritt, um ihn an der Hinterkante mit der gleichgerichteten Geschwindigkeit $V + v$ zu verlassen (Abb. 1).

darf man als Dichte einer Belegung des Strahls mit tragenden Wirbeln betrachten. Der Impulssatz, angewandt auf eine den Strahl dicht umschließende und an der Hinterkante sowie im Unendlichen senkrecht schneidende Kontrollfläche, besagt, daß wegen Fehlens äußerer Kräfte die Aufwärtskomponente der Druckkräfte mit der Änderung der Abwärtskomponente des Impulsüberschusses im Strahl im Gleichgewicht steht:

$$0 = \int_L^\infty \varrho (V_\infty + \Delta V_x)\, \varepsilon\, ds - \frac{\Delta J_y}{b}. \tag{5}$$

Hier ist s der Abstand von der Flügelvorderkante längs der Wirbelfläche gemessen. L die Flügeltiefe und ΔV_x die x-Komponente der Störgeschwindigkeit $[(V_\infty + \Delta V)\, dx = (V_\infty + \Delta V_x)\, ds]$. Dabei ist schon berücksichtigt, daß ohne Strahl ($v = 0$) mit dem Impulsüberschuß $\Delta J = \varrho\, b\, h\, [(V + v)^2 - V^2]$ auch die Wirbeldichte ε verschwinden muß [siehe auch Gl. (14)]. Die Abwärtskomponente ist $\Delta J_y = \Delta J \sin \delta_H$. Der Auftrieb des Tragflügels mit Blasstrahl ergibt sich aus einer entsprechenden Anwendung des Impulssatzes auf eine den Flügel dicht umschließende und den Strahl an der Hinterkante senkrecht schneidende Kontrollfläche:

$$\frac{A}{b} = \int_0^L \varrho (V_\infty + \Delta V_x)(\gamma_0 + \Delta\gamma)\, ds + \frac{\Delta J_y}{b}. \tag{6}$$

Hier haben wir die Dichte γ der Belegung des Flügels mit tragenden Wirbeln in den ohne Strahl bereits vorhandenen Grundanteil γ_0 und den vom Strahl verursachten Zusatzanteil $\Delta\gamma$, dessen Zustandekommen wir noch zu diskutieren haben, zerlegt. Durch Addition der beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$\frac{A}{b} = \int_0^L \varrho (V_\infty + \Delta V_x)(\gamma_0 + \Delta\gamma)\, ds + \int_L^\infty \varrho (V_\infty + \Delta V_x)\, \varepsilon\, ds. \tag{7}$$

Der Auftrieb des Tragflügels mit Blasstrahl kann aber auch durch Anwendung des Impulssatzes auf eine Flügel und Strahl einschließende Kontrollfläche festgestellt werden, die überall in sehr großer Entfernung vom Flügel verläuft und den Strahl im Unendlichen senkrecht schneidet (Satz von *Kutta-Joukowski*),

$$\frac{A}{b} = \varrho V_\infty \left[\int_0^L (\gamma_0 + \Delta\gamma)\, ds + \int_L^\infty \varepsilon\, ds\right]. \tag{8}$$

Da die Ausdrücke (7) und (8) übereinstimmen müssen, ergibt sich die Beziehung

$$\int_0^L \Delta V_x (\gamma_0 + \Delta\gamma)\, ds + \int_L^\infty \Delta V_x \cdot \varepsilon\, ds = 0, \tag{9}$$

die sich unabhängig von ihrer Herleitung durch Anwendung des Induktionsgesetzes verifizieren läßt (Gegenseitigkeit der Wirbelinduktion).

Subtrahieren wir nun vom Auftrieb des Flügels mit Blasstrahl nach (8) den Auftrieb des Flügels ohne Blasstrahl

$$\frac{A_0}{b} = \varrho V_\infty \int_0^L \gamma_0\, ds, \tag{10}$$

so erhalten wir den vom Strahl verursachten Zusatzauftrieb

$$\frac{\Delta A}{b} = \varrho V_\infty \left(\int_0^L \Delta\gamma \cdot ds + \int_L^\infty \varepsilon\, ds\right). \tag{11}$$

Dieser Zusatzauftrieb ist nach (5) um folgenden Betrag größer als die Abwärtskomponente des Impulsüberschusses im Strahl an der Hinterkante:

$$\frac{\Delta A - \Delta J_y}{b} = \varrho V_\infty \int_0^L \Delta\gamma \cdot ds - \varrho \int_L^\infty \Delta V_x \cdot \varepsilon\, ds. \tag{12}$$

Das läßt sich mit Hilfe von (9) umformen in

$$\frac{\Delta A - \Delta J_y}{b} = \varrho \int_0^L [(V_\infty + \Delta V_x)\,\Delta\gamma + \Delta V_{x'}\cdot\gamma_0]\,ds\,. \tag{13}$$

Der Zusatzauftrieb ist also mindestens dann größer als die Abwärtskomponente des Impulsüberschusses an der Hinterkante, wenn die vom Blasstrahl verursachten Zusatzgrößen ΔV_x und $\Delta\gamma$ längs der gesamten Flügeltiefe positiv sind. Das ist aber bei positivem Ausblaswinkel δ_H des Strahls immer der Fall. Denn da nach (15) die Wirbeldichte ε hinter dem Flügel überall positiv ist und diese Wirbelbelegung mit Bezug auf die Anblasrichtung tiefer liegt als die Hinterkante, induziert sie längs der gesamten Flügeltiefe eine Störgeschwindigkeit mit positiver x-Komponente ΔV_x und mit positiver y-Komponente (Aufwind); der induzierte Aufwind aber bedingt eine überall positive Zusatzbelegung $\Delta\gamma$.

Anschaulich gesprochen steht der Flügel in einer durch den Strahl gestörten Strömung. Die Störung besteht darin, daß der Überschuß des schnellen gekrümmten Strahls an Zentrifugalkräften gegenüber der Grundströmung den Strahl nach unten und damit die Grundströmung aus ihrem ursprünglichen Verlauf heraus drängt (Abb. 2). Der Blasstrahl, den man zu einem dünnen Blech erstarren lassen darf, wenn man die beim Erstarren fortfallenden Zentrifugalkräfte durch äußere Kräfte ersetzt, wirkt dabei wie eine mit dem Flügel nicht verbundene Fortsetzung desselben, so daß sich die tragende Wirbelfläche über die Hinterkante hinaus als nunmehr ebenfalls tragende Wirbelfläche fortsetzt und die wirksame Flügeltiefe vergrößert wird, wodurch dann auch die Umströmung der Vorderkante verstärkt und die Spaltungsstromlinie in Flügelnähe nach hinten unten verlagert wird. Das bedeutet erhöhte Zirkulation um den Flügel selbst, wo die Störung sich in einem induzierten Aufwind, einer induzierten Übergeschwindigkeit und einer endlichen Wirbeldichte an der Hinterkante ausdrückt.

Abb. 2. Spaltungs- und Zusammenfluß-Stromlinien (schematisch).

3. Die Integralgleichungen der Wirbelverteilung. Um dem Überschuß des schnellen gekrümmten Strahls an Zentrifugalkräften das Gleichgewicht zu halten, bedarf es eines Drucksprungs von der Größe

$$p_2 - p_1 = \varrho\,[(V + v)^2 - V^2]\,\frac{h}{r} = 2\,\Delta p_g\,\frac{h}{r}\,, \tag{14}$$

worin $V = V_\infty + \Delta V$ die örtliche Geschwindigkeit der Grundströmung, v die Übergeschwindigkeit des Strahls gegenüber V, r den örtlichen Krümmungsradius und Δp_g den Überschuß des Strahls an Gesamtdruck bezeichnet (vgl. die eingangs zitierte Arbeit des Verfassers). Durch Vergleich mit (4) erhält man die Wirbeldichte hinter dem Flügel

$$\varepsilon = 2\,\frac{\Delta p_g}{\varrho\,V}\,\frac{h}{r} \approx 2\,\frac{\Delta p_g}{\varrho V_\infty}\,h\,\frac{d^2 y_s}{dx^2}\,. \tag{15}$$

Sind die vorkommenden Neigungen und Krümmungen hinreichend klein, so daß $\Delta V \ll V_\infty$ und $h = \text{const}$ angenommen werden darf, dann ergibt das Gesetz der Wirbelinduktion zwei Integralgleichungen zur Bestimmung der Funktionen $\gamma(x)$ und $\varepsilon(x)$; ihre linken Seiten lauten

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dy_F(x)}{dx} \quad \text{im Bereich} \quad 0 \leqq x \leqq L\,, \tag{16}$$

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dy_S(x)}{dx} \quad \text{im Bereich} \quad x \geq L\,, \tag{17}$$

wenn y_F und y_S die Ordinaten der tragenden Wirbelfläche am Flügel und am Strahl bedeuten. Die rechten Seiten lauten in beiden Bereichen formal übereinstimmend

$$\frac{dy(x)}{dy} = \frac{1}{2\,\pi\,V_\infty}\int_0^L \frac{\gamma(x')}{x' - x}\,dx' + \frac{1}{2\,\pi}\,\frac{\Delta p_g}{q_\infty}\,h\int_L^\infty \frac{d^2 y_S(x')}{dx'^2}\,\frac{dx'}{x' - x} \tag{18}$$

mit $q_\infty = \varrho\,V_\infty^2/2$. Die Funktion $y_F(x)$ ist durch die Gestalt des Flügelprofils vorgegeben; die unbekannten Funktionen $y_S(x)$ und $\varepsilon(x)$ sind durch Gl. (15) miteinander verknüpft. Lösungen dieses Gleichungssystems stehen zur Zeit noch nicht zur Verfügung.

(Eingegangen am 2. August 1954.)

Anschrift des Verfassers: Professor *H. B. Helmbold*, 646 N. Bluff Avenue, Wichita 6, Kansas USA.

Wachstum der laminaren Grenzschicht an schräg angeströmten Zylindern bei Anfahrt aus der Ruhe*.

Von H. Wundt.

1. Einleitung. Die dreidimensionalen Grenzschichtströmungen inkompressibler Medien sind der rechnerischen Behandlung wesentlich schwieriger zugänglich als die ebenen, weil die Methode der Stromfunktion zur Integration der Kontinuitätsgleichung für drei Ortskoordinaten im allgemeinen nicht anwendbar ist. Es ist daher von Bedeutung, daß in Sonderfällen das System der Grenzschicht-Differentialgleichungen „zerfällt", wie zuerst *Prandtl*[1] bemerkt hat. Unter diesem als „Unabhängigkeitsprinzip" bezeichneten Sachverhalt versteht man, daß nicht in jeder der Gleichungen zugleich sämtliche Geschwindigkeitskomponenten der Grenzschicht-Strömung auftreten, weshalb man erst ein Teilsystem für zwei Komponenten lösen kann. Die dritte Komponente wird nachträglich aus der letzten Gleichung bestimmt und beeinflußt die anderen Komponenten nicht mehr.

Ein solcher Fall liegt beim schräg angeströmten Zylinder vor, auf den sich die folgenden Untersuchungen beziehen.

2. Aufstellung der Grenzschichtgleichungen. Wir verstehen, wie neuerdings allgemein üblich, unter (x, y, z) ein krummliniges Koordinatensystem derart, daß x die krummlinige Wandbogenlänge längs der Kontur eines ebenen Schnitts senkrecht zu den Erzeugenden des umströmten Zylinders ist, y der senkrechte Abstand von einem Bezugs-Normalschnitt, und z der nach außen positive Abstand von der Zylinderoberfläche. Die hierauf bezogenen Geschwindigkeitskomponenten der Grenzschichtströmung heißen u, v, w. p sei der Druck, t die Zeit, ϱ die konstante Dichte und ν die konstante kinematische Zähigkeit des Mediums.

Mit diesen Bezeichnungen lauten die Gleichungen für eine allgemeine dreidimensionale, inkompressible, instationäre Grenzschichtströmung (vgl. etwa *Schlichting*[2]):

$$\left.\begin{aligned} u_t + u u_x + v u_y + w u_z &= -\frac{1}{\varrho} p_x + \nu u_{zz}\,, \\ v_t + u v_x + v v_y + w v_z &= -\frac{1}{\varrho} p_y + \nu v_{zz}\,, \end{aligned}\right\} \quad \text{(Bewegungsgleichungen)} \tag{1a, 1b}$$

$$u_x + v_y + w_z = 0\,. \qquad \text{(Kontinuitätsgleichung).} \tag{1c}$$

Die Indizes bedeuten partielle Ableitungen nach den betreffenden Variablen.

Hierzu treten die Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} &\text{für } z = 0\text{:} && u(x, y, t) = 0\,, \\ &&& v(x, y, t) = 0\,, \quad \text{(Haftbedingungen)} \\ &&& w(x, y, t) = 0\,, \quad \text{(Undurchlässigkeit der Wand)} \\ &\text{für } z\sqrt{Re} \to \infty\text{:} && u(x, y, t) \to U^0(x, y, t)\,, \\ &&& v(x, y, t) \to V^0(x, y, t)\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

U^0 und V^0 sind die Werte der mit großen Buchstaben U, V, W bezeichneten Außenströmung an der Außenfläche der Grenzschicht; Re ist die mit einer charakteristischen Länge und einer charakteristischen Geschwindigkeit gebildete *Reynolds*sche Zahl.

Die Druckglieder sind aus den *Bernoulli*schen Gleichungen

$$U^0_t + U^0 U^0_x + V^0 U^0_y = -\frac{1}{\varrho} p_x\,, \tag{3a}$$

$$V^0_t + U^0 V^0_x + V^0 V^0_y = -\frac{1}{\varrho} p_y \tag{3b}$$

* Die Arbeit entstand am Mathematischen Institut der Universität Freiburg i. Br., Abteilung Angewandte Mathematik. Sie wurde durch das „Air Research and Development Command, United States Air Force" finanziell gefördert.

[1] *L. Prandtl*, Über Reibungsschichten bei dreidimensionalen Strömungen, *Betz*-Festschrift (1945), S. 134.

[2] *H. Schlichting*, Grenzschichttheorie, Karlsruhe 1951 (vgl. bes. Kap. X und XI).

zu bestimmen. Bei gegebener Körperform kann man die aus den *Euler*schen Bewegungsgleichungen der idealen Flüssigkeit zu berechnenden Geschwindigkeitskomponenten U^0 und V^0 und damit den Druckgradienten längs der Körperoberfläche als bekannt ansehen.

Von dem System (1) mit (2) und (3) ist, abgesehen von einer einzigen Arbeit[1], noch keine Lösung bekannt, in der alle Terme miteinander in Wechselwirkung stehen. Wir suchen daher solche Fälle, in denen u und w aus (1a) und (1c) unabhängig von v bestimmbar sind, während v nachträglich aus (1b) berechnet werden soll. Dazu müssen die v enthaltenden Terme in (1a) und (1c) verschwinden, d. h. $v_y = 0$ sein und wegen $v \not\equiv 0$ auch $u_y = 0$. Die Tangentialkomponenten der Geschwindigkeit in der Grenzschicht sollen von der einen Wandkoordinate y nicht abhängen. Infolgedessen müssen wir die Randbedingungen und die Anströmverhältnisse y-unabhängig wählen, was eine von y unabhängige Außenströmung U, V, W (als Funktionen von x, z, t) erfordert.

Die genannten Bedingungen sind erfüllt für einen schräg angeströmten, unendlich langen Zylinder in rotationsfreier Außenströmung, wobei die nachträglich zu berechnende Geschwindigkeitskomponente diejenige parallel zu den Erzeugenden ist. Wird der Zylinder in großem Wandabstand unter einem festen Winkel α gegen einen Normalschnitt angeströmt, der durch $\operatorname{tg}\alpha = V_\infty / U_\infty$ bestimmt ist[2], so ist die Zeitabhängigkeit von U und V dieselbe, und V ist nicht von x abhängig. Insbesondere gilt an der Wand bzw. in grenzschichttheoretischer Näherung am Außenrand der Grenzschicht $V^0 = V^0(t)$.

Auf den damit bezeichneten Fall beziehen sich die folgenden Untersuchungen. Die *Bernoulli*schen Gleichungen (3) reduzieren sich auf

$$U^0_t + U^0 U^0_x = -\frac{1}{\varrho} p_x \,, \tag{4a}$$

$$V^0_t \qquad\quad = -\frac{1}{\varrho} p_y \,. \tag{4b}$$

Während der Druckgradient y-unabhängig ist, gilt dies für den Druck selbst nicht; er ist linear in y.

Die Grenzschichtgleichungen (1) für den schräg angeströmten Zylinder lauten damit

$$u_t + u u_x + w u_z = U^0_t + U^0 U^0_x + \nu u_{zz} \,, \tag{5a}$$

$$v_t + u v_x + w v_z = V^0_t \qquad\quad + \nu v_{zz} \,, \tag{5b}$$

$$u_x + w_z \;\; = 0 \tag{5c}$$

mit den Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} &\text{für } z = 0\text{:} \qquad u(x,t) = v(x,t) = w(x,t) = 0 \,, \\ &\text{für } z\sqrt{Re} \to \infty\text{:}\; u(x,t) \to U^0(x,t);\; v(x,t) \to V^0(t) \,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Aus der Gültigkeit des Unabhängigkeitsprinzips folgt, daß die vor allem interessierenden Ablösungserscheinungen der Grenzschicht weder zeitlich noch örtlich durch das Hinzutreten einer Querkomponente V_∞ beeinflußt werden. Alle diesbezüglichen Daten sind vielmehr bereits der Lösung für die Senkrecht-Anströmung allein zu entnehmen[3].

3. Integration der Grenzschichtgleichungen für verschiedene Bewegungsgesetze mittels der *Blasius*schen Zeitreihe. Die Integration des Systems (5) kann nun in zwei getrennten Schritten vorgenommen werden:

(a) Ermittlung von u und w aus (5a) und (5c),

(b) Ermittlung von v aus (5b) unter Berücksichtigung von (a).

Für zwei Fälle von Bewegungsgesetzen hat bereits *Blasius* 1908 in seiner Dissertation[4] auf Anregung *Prandtl*s Lösungsansätze gegeben, die im folgenden verwendet werden, nämlich für

(α) ruckartige Anfahrt des Zylinders aus der Ruhe zu gleichförmiger Geschwindigkeit,

(β) gleichförmige Beschleunigung aus der Ruhe heraus.

Görtler zeigte, daß sich die *Blasius*sche Methode auf Bewegungsgesetze der Form

$$U = \text{konst.}\, t^n \qquad (n \geqq 0, \text{ ganz}) \tag{7}$$

verallgemeinern läßt[5,6]. Die Fälle (α) und (β) sind darin mit $n = 0$ und $n = 1$ enthalten.

---

[1] *K. H. Thiriot*, Z. angew. Math. Mech. 20 (1940), S. 1.

[2] V_∞ und U_∞ sind die Komponenten der ungestörten Anströmgeschwindigkeit fern vom Zylinder.

[3] *H. Görtler*, Arch. Math. 3 (1952), S. 216.

[4] *H. Blasius*, Z. Math. Phys. 56 (1908), S. 1.

[5] *H. Görtler*, Ing.-Arch. 14 (1944), S. 286.

[6] *H. Görtler*, Arch. Math. 1 (1948/49), S. 138.

Obgleich das Problem (a) der Senkrecht-Anströmung in den genannten Arbeiten von *Görtler* bereits behandelt ist, soll hier der Gedankengang der Lösung doch zusammenfassend wiedergegeben werden, da einerseits, wie am Beispiel des Kreiszylinders (Abschnitt 5) ersichtlich, die Gleichungen erneut mit höherer Genauigkeit numerisch gelöst werden mußten, zum anderen damit die Methodik zur Ermittlung der Querkomponente v bereits gegeben ist und daher dann kurz gefaßt werden kann.

Wir nehmen eine vorläufig noch beliebige natürliche Zahl n für das Anströmgesetz (7) an, so daß die Potentialströmung am Außenrand der Grenzschicht

$$U^0(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0\,, \\ q(x)\,t^n & \text{für } t \geqq 0 \end{cases} \tag{8}$$

ist. Durch $q(x)$ werden die Daten des speziellen Problems (Kreiszylinder, elliptischer Zylinder o. dgl.) ausgedrückt, berechenbar aus den *Euler*schen Gleichungen der idealen Flüssigkeit.

Blasius integriert die Kontinuitätsgleichung (5c) durch Einführung einer Stromfunktion $\psi(x,z,t)$ mit $u = \psi_z$, $w = -\psi_x$. Die weitere Rechnung beruht nun auf einer Iteration. Bei Bewegungen aus der Ruhe heraus sind für ganz kleine Zeiten die quadratischen Trägheitsglieder unwesentlich; aus (5a) entsteht in nullter Näherung eine lineare inhomogene Gleichung vom Wärmeleitungstyp. Das entstehende Defizit gegenüber der Lösung der vollen Gleichung wird als inhomogenes Glied in die Gleichung für die erste Näherung eingegeben, und so fort. Praktisch läuft dies auf eine Reihenentwicklung der Stromfunktion nach Potenzen der Zeit hinaus, die, eingesetzt in (5a), eine rekursiv zu lösende Folge l i n e a r e r Differentialgleichungen für die Koeffizientenfunktionen liefert.

Zuvor führen wir wie in der Wärmeleitungsgleichung mittels der Ähnlichkeitstransformation $\eta = z/2\sqrt{\nu\,t}$ die dimensionslose Variable η ein, wodurch die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen um eins vermindert wird. Die Grenzschichtgleichung (5a) lautet in den Koordinaten x, η, t, wobei das aus (8) berechnete Druckglied eingesetzt ist,

$$u_t - \frac{\eta}{2t}\,u_\eta + u\,u_x + \frac{w}{2\sqrt{\nu\,t}}\,u_\eta = n\,q\,t^{n-1} + q\,q'\,t^{2n} + \frac{1}{4\,t}\,u_{\eta\eta}\,. \tag{9}$$

Der Strich bei q bedeutet die Ableitung nach seiner Variablen x.

Für die Stromfunktion kann man nun den Ansatz machen

$$\psi(x,\eta,t) = 2\sqrt{\nu\,t}\;t^n \sum_{\lambda=0}^{\infty} t^{\lambda\,(n+1)}\,\chi_{n,\lambda}(x,\eta)\,. \tag{10}$$

Wir entwickeln also nach Potenzen von t^{n+1}, d. h. nach Potenzen des vom Körper zurückgelegten Weges. Nach Einsetzen in (9) entsteht jetzt durch Vergleich gleicher t-Potenzen die Folge rekursiv zu lösender linearer Gleichungen für die $\chi_{n,\lambda}(x,\eta)$:

$$\frac{\partial^3\chi_{n0}}{\partial\eta^3} + 2\,\eta\,\frac{\partial^2\chi_{n0}}{\partial\eta^2} - 4\,n\,\frac{\partial\chi_{n0}}{\partial\eta} = -\,4\,n\,q(x)\,, \tag{11a}$$

$$\frac{\partial^3\chi_{n1}}{\partial\eta^3} + 2\,\eta\,\frac{\partial^2\chi_{n1}}{\partial\eta^2} - 4\,(2n+1)\,\frac{\partial\chi_{n1}}{\partial\eta} = 4\left[\frac{\partial\chi_{n0}}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2\chi_{n0}}{\partial x\,\partial\eta} - \frac{\partial\chi_{n0}}{\partial x}\,\frac{\partial^2\chi_{n0}}{\partial\eta^2} - q(x)\,q'(x)\right], \tag{11b}$$

$$\frac{\partial^3\chi_{n2}}{\partial\eta^3} + 2\,\eta\,\frac{\partial^2\chi_{n2}}{\partial\eta^2} - 4\,(3n+2)\,\frac{\partial\chi_{n2}}{\partial\eta} = 4\left[\frac{\partial\chi_{n0}}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2\chi_{n1}}{\partial x\,\partial\eta} + \frac{\partial\chi_{n1}}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2\chi_{n0}}{\partial x\,\partial\eta} - \frac{\partial\chi_{n0}}{\partial x}\,\frac{\partial^2\chi_{n1}}{\partial\eta^2} - \frac{\partial\chi_{n1}}{\partial x}\,\frac{\partial^2\chi_{n0}}{\partial\eta^2}\right], \tag{11c}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^3\chi_{n3}}{\partial\eta^3} + 2\,\eta\,\frac{\partial^2\chi_{n3}}{\partial\eta^2} - 4\,(4n+3)\,\frac{\partial\chi_{n3}}{\partial\eta} = 4\Bigg[&\frac{\partial\chi_{n0}}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2\chi_{n2}}{\partial x\,\partial\eta} + \frac{\partial\chi_{n1}}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2\chi_{n1}}{\partial x\,\partial\eta} + \frac{\partial\chi_{n2}}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2\chi_{n0}}{\partial x\,\partial\eta} - \frac{\partial\chi_{n0}}{\partial x}\,\frac{\partial^2\chi_{n2}}{\partial\eta^2} \\ &- \frac{\partial\chi_{n1}}{\partial x}\,\frac{\partial^2\chi_{n1}}{\partial\eta^2} - \frac{\partial\chi_{n2}}{\partial x}\,\frac{\partial^2\chi_{n0}}{\partial\eta^2}\Bigg].\end{aligned}\right\} \tag{11d}$$

.....

Die Iteration kommt dadurch zum Ausdruck, daß die rechten, inhomogenen Seiten jeweils nur Terme enthalten, die aus den Lösungen schon vorher behandelter Gleichungen berechenbar sind.

Nun wird gefordert, daß die zur nullten Näherung gehörende Beiwertfunktion χ_{n0} bereits die wesentlichen Randbedingungen erfüllt, während die folgenden $\chi_{n,\lambda}$ ($\lambda > 0$) am Innen- und

am Außenrand der Grenzschicht keine Beiträge mehr liefern sollen, m. a. W.:

$$\text{für } \eta = 0: \begin{cases} \chi_{n,\lambda} = 0, \\ \dfrac{\partial \chi_{n,\lambda}}{\partial \eta} = 0, \end{cases} \qquad \text{für } \eta \to \infty: \begin{cases} \dfrac{\partial \chi_{n0}}{\partial \eta} \to q(x), \\ \dfrac{\partial \chi_{n,\lambda}}{\partial \eta} \to 0 \quad (\lambda > 0). \end{cases} \tag{12}$$

Die x-Abhängigkeit der $\chi_{n,\lambda}$ kommt nur in den rechten Seiten der ersten beiden Gleichungen (11) herein[1]. Aus diesem Grund sind die $\chi_{n,\lambda}(x,\eta)$ in Produkte $g_\lambda(x)\,\zeta_{n,\lambda}(\eta)$ aufspaltbar, wobei die $g_\lambda(x)$ eindeutig durch die $q(x)$ ausdrückbar und die $\zeta_{n,\lambda}(\eta)$ *universelle*, d. h. vom speziellen Zylinder unabhängige Funktionen sind. Man berechnet sie auf Vorrat und kann dann Beispiele durch einfaches Einsetzen der betreffenden Potentialgeschwindigkeit $q(x)$ in die Ausdrücke für u, v und w behandeln.

Da die rechte Seite von (11a) nur einfach $q(x)$ enthält, setzen wir an

$$\chi_{n0}(x,\eta) = q(x)\,\zeta_{n0}(\eta). \tag{13a}$$

Beim Einsetzen dieses Ausdrucks in die rechte Seite von (11b) bemerkt man, daß alle Terme den Faktor $q\,q'$ besitzen. Daher setzt man

$$\chi_{n1}(x,\eta) = q(x)\,q'(x)\,\zeta_{n1}(\eta). \tag{13b}$$

Die rechte Seite von (11c) erhält damit Terme mit zwei verschiedenen Formen der x-Abhängigkeit, nämlich mit Faktoren $q\,q'^2$ und $q^2 q''$. Wegen der Linearität der Gleichungen kann man superponieren:

$$\chi_{n2}(x,\eta) = q(x)\,q'^2(x)\,\zeta_{n,2a}(\eta) + q^2(x)\,q''(x)\,\zeta_{n,2b}(\eta). \tag{13c}$$

Entsprechend ist aufzuspalten:

$$\chi_{n3}(x,\eta) = q(x)\,q'^3(x)\,\zeta_{n,3a}(\eta) + q^2(x)\,q'(x)\,q''(x)\,\zeta_{n,3b}(\eta) + q^3(x)\,q'''(x)\,\zeta_{n,3c}(\eta). \tag{13d}$$

Die Anzahl der je Stufe benötigten Funktionen ζ wächst weiterhin rasch an. Es erscheint nicht sinnvoll, noch höhere Näherungen zu berechnen, da die Grenzschichtvoraussetzungen ohnehin nur für kleine Zeiten gelten, jedenfalls nicht mehr zu lang nach dem Beginn der Grenzschichtablösung, weil dann das starke Anwachsen der Grenzschicht die Potentialströmung verdrängt und somit die äußeren Randbedingungen verändert werden.

Über die Konvergenz des *Blasius*schen Reihenansatzes (10) ist nichts bekannt. Für praktische Zwecke ist er bei kleinen Zeiten jedenfalls brauchbar, da der Maximalbetrag der Beiwertfunktionen $\zeta_{n,\lambda}(\eta)$ mit wachsendem λ, soweit berechnet, immer kleiner wird.

Die Ansätze (13) ergeben wiederum eine Folge rekursiv zu lösender Differentialgleichungen für die $\zeta_{n,\lambda}$ (Striche bedeuten hier Ableitungen nach dem Argument η):

$$\zeta'''_{n0} + 2\eta\,\zeta''_{n0} - 4n\,\zeta'_{n0} = -4n, \tag{14}$$

$$\zeta'''_{n1} + 2\eta\,\zeta''_{n1} - 4(2n+1)\,\zeta'_{n1} = 4(\zeta'^2_{n0} - \zeta_{n0}\zeta''_{n0} - 1), \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} \zeta'''_{n,2a} + 2\eta\,\zeta''_{n,2a} - 4(3n+2)\,\zeta'_{n,2a} &= 4(2\zeta'_{n0}\zeta'_{n1} - \zeta_{n0}\zeta''_{n1} - \zeta''_{n0}\zeta_{n1}), \\ \zeta'''_{n,2b} + 2\eta\,\zeta''_{n,2b} - 4(3n+2)\,\zeta'_{n,2b} &= 4(\zeta'_{n0}\zeta'_{n1} - \zeta''_{n0}\zeta_{n1}), \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} \zeta'''_{n,3a} + 2\eta\,\zeta''_{n,3a} - 4(4n+3)\,\zeta'_{n,3a} &= 4(2\zeta'_{n0}\zeta'_{n,2a} + \zeta'^2_{n1} - \zeta_{n0}\zeta''_{n,2a} - \zeta''_{n0}\zeta_{n,2a} \\ &\quad - \zeta_{n1}\zeta''_{n1}), \\ \zeta'''_{n,3b} + 2\eta\,\zeta''_{n,3b} - 4(4n+3)\,\zeta'_{n,3b} &= 4(2\zeta'_{n0}\zeta'_{n,2a} + 3\zeta'_{n0}\zeta'_{n,2b} + \zeta'^2_{n1} - \zeta_{n0}\zeta''_{n,2b} \\ &\quad - 2\zeta''_{n0}\zeta_{n,2a} - 2\zeta''_{n0}\zeta_{n,2b} - \zeta_{n1}\zeta''_{n1}), \\ \zeta'''_{n,3c} + 2\eta\,\zeta''_{n,3c} - 4(4n+3)\,\zeta'_{n,3c} &= 4(\zeta'_{n0}\zeta'_{n,2b} - \zeta''_{n0}\zeta_{n,2b}) \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

. . . . . .

mit den Randbedingungen

$$\text{für } \eta = 0: \begin{cases} \zeta_{n,\lambda} = 0, \\ \zeta_{n,\lambda} = 0, \end{cases} \qquad \text{für } \eta \to \infty: \begin{cases} \zeta'_{n0} \to 1, \\ \zeta'_{n,\lambda} \to 0 \quad (\lambda > 0). \end{cases} \tag{18}$$

Die Methode zur Gewinnung einer Folge gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Beiwertfunktionen der Querkomponente v ist mit geringen Abweichungen die gleiche.

Damit in großer Entfernung vom Zylinder eine von x und y unabhängige stationäre Potentialströmung besteht, muß das Bewegungsgesetz für U^0 und für V^0 die gleiche Zeitabhängigkeit

[1] Ist $q \equiv$ konst., so gibt bereits die nullte Näherung, wie wir sehen werden, die volle Lösung. Dies ist der Fall der Anfahrt einer ebenen Platte in ihrer eigenen Ebene.

aufweisen:

$$V^0(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ \bar{q}\, t^n & \text{für } t \geqq 0 \quad (\bar{q} \equiv \text{konst.}). \end{cases} \tag{19}$$

Das daraus berechnete Druckglied wird in die Grenzschichtgleichung (5b) eingesetzt.

Diese lautet in den auch für (9) eingeführten (x, η, t)-Koordinaten

$$v_t - \frac{\eta}{2t} v_\eta + u v_x + \frac{w}{2\sqrt{\nu t}} v_\eta = n \bar{q}\, t^{n-1} + \frac{1}{4t} v_{\eta\eta}. \tag{20}$$

Die Gleichung für v ist also im Gegensatz zu denjenigen für u und w von vorneherein linear.

Wir machen den Zeitreihenansatz

$$v(x, \eta, t) = t^n \sum_{\lambda=0}^{\infty} t^{\lambda(n+1)} \varphi_{n,\lambda}(x, \eta). \tag{21}$$

Da wir in (10) den entsprechenden Ansatz für die Stromfunktion gemacht hatten, müssen wir erwarten, daß die Beiwertfunktionen $\varphi_{n,\lambda}$ vergleichsweise eine Differentiationsordnung tiefer stehen als die $\chi_{n,\lambda}$, d.h. daß die $\varphi_{n,\lambda}$ den $\partial \chi_{n,\lambda}/\partial \eta$ entsprechen.

Mit dem Ansatz (21) für v sowie den sich aus (10) durch Differentiation ergebenden Ausdrücken für u und w gehen wir in (20) ein und erhalten die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 \varphi_{n0}}{\partial \eta^2} + 2\eta \frac{\partial \varphi_{n0}}{\partial \eta} - 4n \varphi_{n0} = -4n\bar{q}, \tag{22a}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{n1}}{\partial \eta^2} + 2\eta \frac{\partial \varphi_{n1}}{\partial \eta} - 4(2n+1)\varphi_{n1} = -4 q' \zeta_{n0} \frac{\partial \varphi_{n0}}{\partial \eta}, \tag{22b}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{n2}}{\partial \eta^2} + 2\eta \frac{\partial \varphi_{n2}}{\partial \eta} - 4(3n+2)\varphi_{n2} = +4\left[q \zeta'_{n0} \frac{\partial \varphi_{n1}}{\partial x} - (q'^2 + qq'') \zeta_{n1} \frac{\partial \varphi_{n0}}{\partial \eta} - q' \zeta_{n0} \frac{\partial \varphi_{n1}}{\partial \eta}\right], \tag{22c}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_{n3}}{\partial \eta^2} + 2\eta \frac{\partial \varphi_{n3}}{\partial \eta} - 4(4n+3)\varphi_{n3} = +4 \Big\{ & qq' \zeta'_{n1} \frac{\partial \varphi_{n1}}{\partial x} + q \zeta'_{n0} \frac{\partial \varphi_{n2}}{\partial x} \\ & - [(q'^3 + 2qq'q'') \zeta_{n,2a} + (2qq'q'' + q^2 q''') \zeta_{n,2b}] \frac{\partial \varphi_{n0}}{\partial \eta} \\ & - (q'^2 + qq'') \zeta_{n1} \frac{\partial \varphi_{n1}}{\partial \eta} - q' \zeta_{n0} \frac{\partial \varphi_{n2}}{\partial \eta} \Big\}. \end{aligned}\right\} \tag{22d}$$

.....

Als Randbedingungen werden entsprechend gefordert

$$\text{für } \eta = 0\colon \varphi_{n,\lambda} = 0, \qquad \text{für } \eta \to \infty\colon \begin{cases} \varphi_{n0} \to \bar{q}, \\ \varphi_{n,\lambda} \to 0 \quad (\lambda > 0). \end{cases} \tag{23}$$

Dann zerfällen wir die $\varphi_{n,\lambda}$ in gleichfalls zwangsläufiger Weise gemäß

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{n0}(x, \eta) &= \bar{q}\, \bar{\zeta}_{n0}(\eta), \\ \varphi_{n1}(x, \eta) &= \bar{q} q' \bar{\zeta}_{n1}(\eta), \\ \varphi_{n2}(x, \eta) &= \bar{q}\, [q'^2\, \bar{\zeta}_{n,2a}(\eta) + qq'' \bar{\zeta}_{n,2b}(\eta)], \\ \varphi_{n3}(x, \eta) &= \bar{q}\, [q'^3 \bar{\zeta}_{n,3a}(\eta) + qq'q'' \bar{\zeta}_{n,3b}(\eta) + q^2 q''' \bar{\zeta}_{n,3c}(\eta)]. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Daraus folgen die gewöhnlichen Differentialgleichungen für die universellen Beiwertfunktionen $\bar{\zeta}_{n,\lambda}$ der Querkomponente v

$$\bar{\zeta}''_{n0} + 2\eta \bar{\zeta}'_{n0} - 4n \bar{\zeta}_{n0} = -4n, \tag{25}$$

$$\bar{\zeta}'_{n1} + 2\eta \bar{\zeta}'_{n1} - 4(2n+1)\bar{\zeta}_{n1} = -4 \zeta_{n0} \zeta''_{n0}, \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{\zeta}'_{n,2a} + 2\eta \bar{\zeta}'_{n,2a} - 4(3n+2)\bar{\zeta}_{n,2a} &= -4(\zeta''_{n0} \zeta_{n1} + \zeta_{n0} \bar{\zeta}'_{n1}), \\ \bar{\zeta}''_{n,2b} + 2\eta \bar{\zeta}'_{n,2b} - 4(3n+2)\bar{\zeta}_{n,2b} &= +4(\zeta'_{n0} \bar{\zeta}_{n1} - \zeta''_{n0} \zeta_{n1}), \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\bar\zeta''_{n,3a} + 2\eta\,\bar\zeta'_{n,3a} - 4(4n+3)\,\bar\zeta_{n,3a} = +4(\zeta''_{n0}\,\zeta_{n,2a} + \zeta_{n1}\,\bar\zeta'_{n1} + \zeta_{n0}\,\bar\zeta'_{n,2a}),\\
&\bar\zeta''_{n,3b} + 2\eta\,\bar\zeta'_{n,3b} - 4(4n+3)\,\bar\zeta_{n,3b} = +4(\bar\zeta_{n1}\,\zeta'_{n1} + 2\,\zeta'_{n0}\,\bar\zeta_{n,2a} + \zeta'_{n0}\,\bar\zeta_{n,2b}\\
&\qquad\qquad - 2\,\zeta''_{n0}\,\zeta_{n,2a} - 2\,\zeta''_{n0}\,\zeta_{n,2b} - \zeta_{n1}\,\bar\zeta'_{n1} - \zeta_{n0}\,\bar\zeta'_{n,2b}),\\
&\bar\zeta''_{n,3c} + 2\eta\,\bar\zeta'_{n,3c} - 4(4n+3)\,\bar\zeta_{n,3c} = +4(\zeta'_{n0}\,\bar\zeta_{n,2b} - \zeta''_{n0}\,\zeta_{n,2b})
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

mit den Randbedingungen

$$\text{für } \eta = 0\text{: } \bar\zeta_{n,\lambda} = 0, \qquad \text{für } \eta \to \infty\text{: } \begin{cases} \bar\zeta_{n0} \to 1, \\ \bar\zeta_{n,\lambda} \to 0 \qquad (\lambda > 0). \end{cases} \tag{29}$$

Durch Vergleich von (25) mit (14) ersieht man unmittelbar: $\bar\zeta_{n0} \equiv \zeta'_{n0}$. Diese Identität ist in den rechten Seiten von (26), (27) und (28) bereits verwendet.

Mit den Beziehungen (13) und (24) lautet nunmehr die Darstellung der gesuchten Stromfunktion und der Geschwindigkeitskomponenten der Grenzschichtströmung am Zylinder

$$\left.\begin{aligned}
\psi(x,\eta,t) = 2\sqrt{\nu t}\,q(x)\,t^n\{&\zeta_{n0}(\eta) + t^{n+1}q'\zeta_{n1}(\eta) + t^{2(n+1)}[q'^2\zeta_{n,2a}(\eta) + qq''\zeta_{n,2b}(\eta)]\\
&+ t^{3(n+1)}[q'^3\zeta_{n,3a}(\eta) + qq'q''\zeta_{n,3b}(\eta)\\
&+ q^2q'''\zeta_{n,3c}(\eta)] + \cdots\},
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned}
u(x,\eta,t) = \psi_x = \frac{1}{2\sqrt{\nu t}}\psi_\eta = q(x)\,t^n\{&\zeta'_{n0}(\eta) + t^{n+1}q'\zeta'_{n1}(\eta) + t^{2(n+1)}[q'^2\zeta_{n,2a}(\eta)\\
&+ qq''\zeta_{n,2b}(\eta)] + t^{3(n+1)}[q'^3\zeta'_{n,3a}(\eta)\\
&+ qq'q''\zeta'_{n,3b}(\eta) + q^2q'''\zeta'_{n,3c}(\eta)] + \cdots\},
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned}
v(x,\eta,t) = \bar q\,t^n\{&\zeta'_{n0}(\eta) + t^{n+1}q'\bar\zeta_{n1}(\eta) + t^{2(n+1)}[q'^2\bar\zeta_{n,2a}(\eta) + qq''\bar\zeta_{n,2b}(\eta)]\\
&+ t^{3n+1}[q'^3\bar\zeta_{n,3a}(\eta) + qq'q''\bar\zeta_{n,3b}(\eta) + q^2q'''\bar\zeta_{n,3c}(\eta)] + \cdots\},
\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned}
w(x,\eta,t) = -\psi_x = -2\sqrt{\nu t}\,t^n\{&q'\zeta_{n0}(\eta) + t^{n+1}(q'^2 + qq'')\zeta_{n1}(\eta)\\
&+ t^{2(n+1)}[(q'^3 + 2qq'q'')\zeta_{n,2a}(\eta) + (2qq'q'' + q^2q''')\zeta_{n,2b}(\eta)]\\
&+ t^{3(n+1)}[(q'^4 + 3qq'^2q'')\zeta_{n,3a}(\eta) + (2qq'^2q'' + q^2q''^2 + q^2q'q''')\zeta_{n,3b}(\eta)\\
&+ (3q^2q'q''' + q^3q'''')\zeta_{n,3c}(\eta)] + \cdots\}.
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Die u- und die v-Komponente stimmen in der Bauart völlig überein; sie unterscheiden sich nur in den Beiwertfunktionen. Wie die numerische Auswertung im nächsten Abschnitt zeigt, sind die Beiträge der $\bar\zeta_{n,\lambda}$ durchschnittlich geringer als die der entsprechenden $\zeta'_{n,\lambda}$, so daß demnach für gleiche Zeiten sich die u-Grenzschicht etwas weiter nach außen erstreckt als die v-Grenzschicht. Für konstantes $q(x)$ reduzieren sich die Reihen für u und v auf das erste Glied, während w identisch verschwindet. Es wird zudem, wie zu erwarten, $u \approx v$, und man erhält eine der bekannten exakten Lösungen der *Navier-Stokes*schen Gleichungen, nämlich den Fall der in ihrer Ebene angeströmten dünnen Platte, bei der x- und y-Richtung gleichwertig auftreten.

4. Berechnung der universellen Beiwertfunktionen. Die universellen Funktionen $\zeta_{n,\lambda}$ bzw. $\bar\zeta_{n,\lambda}$ wurden teilweise schon früher berechnet und zwar ζ_{00}, ζ_{01}, ζ_{10} und ζ_{11}, jeweils mit erster und zweiter Ableitung durch *Blasius*[1], ζ_{n0}, ζ'_{n0}, ζ''_{n0} für $n = 0,1,2,3,4$ durch *Görtler*[2], $\zeta'_{0,2a}$ und $\zeta'_{0,2b}$ durch *Goldstein* und *Rosenhead*[3]. Für die $\bar\zeta_{n,\lambda}$ lagen seit 1946 einige eigene unveröffentlichte Rechnungen geringerer Genauigkeit vor[4] (graphische Integrationsmethoden). Die Arbeiten wurden damals nicht weiter verfolgt.

Während *Blasius* und später *Goldstein-Rosenhead* explizite Ausdrücke für ihre Funktionen angaben, rechnete *Görtler* mit Hilfe numerischer Integrationsmethoden. Die Genauigkeit betrug durchweg 3 bis 4 Dezimalen, teilweise jedoch bei sehr großer Schrittweite in η.

---

[1] *H. Blasius*, Z. Math. Phys. 56 (1908), S. 1.
[2] *H. Görtler*, Ing.-Arch. 14 (1944), S. 286.
[3] *S. Goldstein* und *L. Rosenhead*, Proc. Cambr. Phil. Soc. 32 (1936), S. 392.
[4] Vgl. *H. Görtler*, Bericht über „Zähe Flüssigkeiten" in „FIAT Review of German Science" (1939—1946), Band 5, Teil III, S. 68.

Eine Auswertung der Ausdrücke (31) bis (33) am Beispiel des Kreiszylinders (siehe im folgenden Abschnitt) zeigte, daß ein Abbrechen der Reihen schon hinter den Gliedern mit ζ_{n1} die bei inkompressiblen Medien energetisch nicht sinnvolle Erscheinung einer „Überhöhung" der Geschwindigkeitsprofile ergab. Es stand zu hoffen, daß der Effekt durch höhere Reihenglieder wieder abgebaut werde. Daher schien es geboten, wenigstens ein weiteres Glied der zeitlichen Entwicklung zu ermitteln. Eine genaue Nachprüfung der Rechnungen von *Goldstein-Rosenhead* ergab leider verschiedene Fehler in den exakten Ausdrücken und infolgedessen auch in den numerischen Werten für $\zeta'_{0,2a}$ und $\zeta'_{0,2b}$ (dort mit F_3 und f_3 bezeichnet)[1].

Die prinzipielle Lösbarkeit der Differentialgleichungen (14), (15) und (16) durch exakte Ausdrücke war sichergestellt, und die Vermutung lag nahe, daß dies auch für die übrigen in Frage kommenden Differentialgleichungen gelte. Da die Genauigkeit einer durch numerische Integration erhaltenen Lösung infolge des Iterationsprozesses mit wachsendem λ rasch abnimmt[2], erwiesen sich die vorhandenen Tafeln der $\zeta_{n,\lambda}$ $(\lambda = 0;1)$ als zu ungenau.

Daher wurde der Weg der expliziten Lösung eingeschlagen, der jeden Verfahrensfehler vermeidet. Die umfangreichen Rechnungen wurden zunächst nur für den Fall $n = 0$ (ruckartige Anfahrt zu gleichförmiger Geschwindigkeit) durchgeführt. Es ergab sich dabei das jetzt zu schildernde verhältnismäßig allgemein anwendbare Verfahren:

Man geht aus von Gleichung (14) für den Fall $n = 0$

$$\zeta'''_{00} + 2\,\eta\,\zeta''_{00} = 0 \tag{14'}$$

unter Berücksichtigung der Randbedingungen (18) mit der Lösung

$$\zeta''_{00}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\eta^2}.$$

Durch einmalige Integration folgt

$$\zeta'_{00}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta} e^{-s^2}\,ds.$$

Jetzt führen wir die Bezeichnungsweise

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta} e^{-s^2}\,ds - 1 \equiv \Phi_0(\eta) \quad \text{(komplementäres Fehlerintegral)} \tag{34a}$$

und

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\eta^2} \equiv \Phi_1(\eta) \quad \text{(Fehlerfunktion)} \tag{34b}$$

ein. $\Phi_0(\eta)$ und $\Phi_1(\eta)$ haben beide die Eigenschaft, im Unendlichen exponentiell zu verschwinden, so daß auch nach Vorsetzen beliebiger Polynomkoeffizienten die Randbedingung für $\eta \to \infty$ mit Ausdrücken in Φ_0 und Φ_1 leicht zu erfüllen ist.

Nunmehr erhalten wir durch nochmalige Integration unter Berücksichtigung von (18)

$$\zeta_{00}(\eta) = \eta\,\Phi_0(\eta) + \frac{1}{2}\,\Phi_1(\eta) + \eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

---

[1] Es sei hier erlaubt, die genannten Irrtümer der *Goldstein-Rosenhead*schen Arbeit richtigzustellen. Nur der Fehler auf S. 398 scheint indessen ein echter Rechenfehler zu sein. S. 395, Gl. (7), letzter Term: anstatt $2\pi^{-1/2}\left(e^{-\eta^2} + e^{-2\eta^2}\right)$ lies $2\pi^{-1}\left(e^{-\eta^2} + e^{-2\eta^2}\right)$; S. 395, Ausdrücke (11), letzte Zeile: anstatt

$$n_2 = \frac{1}{2}\,\pi^{-1/2}(2\eta^2 + 1)\,\mathrm{erf}\,\eta + \eta e^{-\eta^2}$$

lies $n_2 = \frac{1}{2}\,\pi^{1/2}(2\eta^2 + 1)\,\mathrm{erf}\,\eta + \eta e^{-\eta^2}$; S. 397, Ausdruck (25), letzter Term: anstatt $\pi^{-1/2}(4\eta^3 - 10\eta)\,e^{-\eta^2}$ lies $\pi^{-1/2}(4\eta^3 + 10\eta)\,e^{-\eta^2}$; S. 398, Ausdrücke (39), Term T, erster Summand: anstatt $\frac{1}{30}\pi^{-1/2}[10\eta^3 + (20 - 15\alpha)\eta - 8\beta]\,e^{-\eta^2}$ lies $\frac{1}{30}\pi^{-1/2}[10\alpha\eta^3 + (15\alpha - 20)\eta - 8\beta]\,e^{-\eta^2}$; S. 399 Ausdrücke (44), Term Δ, erster Summand: anstatt $\Delta = \frac{8}{27\pi^2} - \ldots$ lies $\Delta = -\frac{8}{27\pi^2} - \ldots$. Die Tafelwerte für $f_3(\eta)$ und $F_3(\eta)$ (einschl. graphische Darstellung) sind wegen des Fehlers auf S. 398 falsch.

[2] Es handelt sich um inhomogene Gleichungen. Bei der Variation der Konstanten werden die auftretenden Integranden für große η sehr groß, so daß die absolute Genauigkeit der Lösung um jeweils fast zwei Zehnerpotenzen geringer ist als die der rechten Seiten der Differentialgleichungen.

Man bemerkt die Eigenschaft von Φ_0 und Φ_1, sich bei Integration und Differentiation mit gewissen Koeffizienten zu reproduzieren.

Rechnen wir nun das inhomogene Glied der nächsten Gleichung (15) aus, so sehen wir, daß es aus Termen mit Φ_0^2, $\Phi_0\,\Phi_1$, Φ_1^2 besteht; die wir als homogen vom Grade zwei bezeichnen wollen, ferner solchen mit Φ_0 und Φ_1, die entsprechend homogen vom ersten Grade sind, versehen jeweils mit Polynomkoeffizienten in η. Man rechnet leicht nach, daß der Homogenitätsgrad der Terme bei Differentiation invariant ist. Der Differentialoperator in (15) ist linear; aus diesem Grund machen wir für die Lösung den Ansatz

$$\begin{aligned}\zeta'_{01}(\eta) = {} & (A_2\,\eta^2 + A_1\,\eta + A_0)\,\Phi_0^2 + (B_1\,\eta + B_0)\,\Phi_0\,\Phi_1 + C_0\,\Phi_1^2 \\ & + (D_2\,\eta^2 + D_1\,\eta + D_0)\,\Phi_0 + (E_1\,\eta + E_0)\,\Phi_1. \end{aligned} \tag{35}$$

Wegen $\zeta'_{01}(\infty) = 0$ muß ein Absolutglied fehlen.

Beim Einsetzen von (35) in (15) liefert der Koeffizientenvergleich zusammen mit einer Gleichung zur Erfüllung der Randbedingung $\zeta'_{01}(0) = 0$ gerade so viele lineare Gleichungen wie unbekannte Koeffizienten A_ν, B_ν, ... vorhanden sind. Die Koeffizientenmatrix zerfällt jedoch in fast ganz getrennte Blöcke auf der Hauptdiagonalen, für jeden Homogenitätsgrad einen, so daß die Behandlung verhältnismäßig einfach ist. Das Resultat für $\zeta'_{01}(\eta)$ ist unter (37) angegeben.

Im nächsten Schritt ist $\zeta'_{01}(\eta)$ zu integrieren. Auch hier empfiehlt sich ein Ansatz der Form (35), nicht etwa Teilintegration. Dabei stellt sich jedoch heraus, daß das System der Terme vom Homogenitätsgrad 2 offenbar noch nicht vollständig ist. Man muß in den Ansatz für $\zeta_{01}(\eta)$ noch ein Glied[1] mit $\Phi_0(\sqrt{2}\,\eta)$ aufnehmen, damit das entstehende lineare Gleichungssystem lösbar wird.

Derselbe Vorgang, nur beträchtlich umfangreicher, wiederholt sich zur Bestimmung von $\zeta'_{0,2a}(\eta)$ und $\zeta'_{0,2b}(\eta)$. Die Berechnung der rechten Seiten von (16) zeigt, daß ein Ansatz mit Termen bis zum Homogenitätsgrad drei notwendig ist. Diese sind die folgenden:

$$\Phi_0^3(\eta),\ \Phi_0^2(\eta)\Phi_1(\eta),\ \Phi_0(\eta)\Phi_1^2(\eta),\ \Phi_1^3(\eta),\ \Phi_0(\sqrt{3}\,\eta),\ \Phi_0(\sqrt{2}\,\eta)\Phi_0(\eta),\ \Phi_0(\sqrt{2}\,\eta)\Phi_1(\eta).$$

Ein solcher Ansatz führt durch Einsetzen in (16) auf ein System von 32 linearen Gleichungen für die verfügbaren Koeffizienten A_ν, B_ν, ..., dessen Lösung die gesuchte Funktion $\zeta'_{0,2a}(\eta)$ bzw. $\zeta'_{0,2b}(\eta)$ liefert.

Es gelingt allerdings nicht mehr, mit dieser Methode auch $\zeta_{0,2a}(\eta)$ und $\zeta_{0,2b}(\eta)$ zu gewinnen[2]. Sie wurden daher mittels sorgfältiger numerischer Quadratur ermittelt.

Genau das Analoge gilt für die Berechnung der $\bar{\zeta}_{0,\lambda}(\eta)$. Die linearen Gleichungssysteme unterscheiden sich von denen für die $\zeta'_{0,\lambda}(\eta)$ nur durch geänderte inhomogene Glieder.

Zur Wiedergabe der sehr langen expliziten Darstellungen für die $\zeta_{0,\lambda}(\eta)$ usw. wird nun die folgende unmißverständliche Symbolik verwendet, wobei die zur gleichen Näherung gehörenden Funktionen zunächst in gemeinsamer Form mit allgemeinen Koeffizienten angegeben sind; die zugehörige Tabelle gibt dann die Zahlwerte für jeden einzelnen Fall:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_{00}(\eta) &= \eta\,\Phi_0(\eta) + \frac{1}{2}\,\Phi_1(\eta) + \eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \\ \zeta'_{00}(\eta) &= \Phi_0(\eta) + 1, \\ \zeta''_{00}(\eta) &= \Phi_1(\eta), \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

---

[1] $\Phi_0(\sqrt{2}\,\eta)$ ist nämlich vom Homogenitätsgrad zwei, wie $\frac{d}{d\eta}\,\Phi_0(\sqrt{2}\,\eta) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\,\Phi_1^2(\eta)$ zeigt. Wir rechnen somit alle Ausdrücke, deren erster Differentialquotient auf die Form $P(\eta)\,\Phi_0^\nu(\eta)\,\Phi_1^\mu(\eta)$ mit $\nu + \mu = n$ zu bringen ist, zum Homogenitätsgrad n.

[2] Das liegt daran, daß $\Phi_0(\eta)\,\Phi_1^2(\eta)$ offenbar in Termen Φ_ν nicht geschlossen integrierbar ist. Infolgedessen ist eine explizite Darstellung der Funktionen $\zeta_{03}, \zeta_{04}, \ldots$ gleichfalls nicht mehr möglich.

$$\left.\begin{aligned}\zeta_{01}(\eta) = {} & \left(\frac{1}{3}\eta^3 - \frac{1}{2}\eta\right)\Phi_0^2(\eta) + \left(\frac{1}{3}\eta^2 - \frac{11}{12}\right)\Phi_0(\eta)\,\Phi_1(\eta) + \frac{1}{12}\eta\,\Phi_1^2(\eta) \\ & + \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\Phi_0(\sqrt{2}\,\eta) + \left[\left(1 + \frac{4}{9\pi}\right)\eta^3 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3\pi}\right)\eta - \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\right]\Phi_0(\eta) \\ & + \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{9\pi}\right)\eta^2 + \left(-\frac{3}{4} + \frac{2}{9\pi}\right)\right]\Phi_1(\eta) + \left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{4}{9\pi\sqrt{\pi}} + \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\right), \\ \left.\begin{matrix}\zeta'_{01}(\eta)\\ \bar{\zeta}_{01}(\eta)\end{matrix}\right\} = {} & (A_2\eta^2 + A_0)\,\Phi_0^2(\eta) + B_1\eta\,\Phi_0(\eta)\,\Phi_1(\eta) + C_0\Phi_1^2(\eta) + (D_2\eta^2 + D_0)\,\Phi_0(\eta) \\ & + (E_1\eta + E_0)\,\Phi_1(\eta).\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

	$\zeta'_{01}(\eta)$	$\bar{\zeta}_{01}(\eta)$
A_2	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
A_0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
B_1	$+\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
C_0	$+\frac{1}{2}$	0

	$\zeta'_{01}(\eta)$	$\bar{\zeta}_{01}(\eta)$
D_2	$+3+\frac{4}{3\pi}$	$-1-\frac{8}{3\pi}$
D_0	$-\frac{1}{2}+\frac{2}{3\pi}$	$-\frac{1}{2}-\frac{4}{3\pi}$
E_1	$+2+\frac{2}{3\pi}$	$-\frac{4}{3\pi}$
E_0	$-\frac{2}{3\sqrt{\pi}}$	$-\frac{2}{3\sqrt{\pi}}$

$$\left.\begin{matrix}\zeta'_{01}(\eta)\\ \bar{\zeta}'_{01}(\eta)\end{matrix}\right\} = A_1\eta\Phi_0^2(\eta) + (B_2\eta^2 + B_0)\,\Phi_0(\eta)\,\Phi_1(\eta) + C_1\eta\,\Phi_1^2(\eta) + D_1\eta\,\Phi_0(\eta) + (E_2\eta^2 + E_1\eta + E_0)\,\Phi_1(\eta). \tag{38}$$

	$\zeta''_{01}(\eta)$	$\bar{\zeta}'_{01}(\eta)$
A_1	$+2$	-2
B_2	-1	-1
B_0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
C_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

	$\zeta''_{01}(\eta)$	$\bar{\zeta}'_{01}(\eta)$
D_1	$+6+\frac{8}{3\pi}$	$-2-\frac{16}{3\pi}$
E_2	-1	-1
E_1	$+\frac{4}{3\sqrt{\pi}}$	$+\frac{4}{3\sqrt{\pi}}$
E_0	$+\frac{3}{2}+\frac{4}{3\pi}$	$-\frac{1}{2}-\frac{8}{3\pi}$

$\zeta_{0,2a}(\eta)$ und $\zeta_{0,2b}(\eta)$ sind nicht geschlossen angebbar (siehe vorhergehende Fußnote);

$$\left.\begin{matrix}\zeta'_{0,2a}(\eta)\\ \zeta'_{0,2b}(\eta)\\ \bar{\zeta}_{0,2a}(\eta)\\ \bar{\zeta}_{0,2b}(\eta)\end{matrix}\right\} = \left.\begin{aligned} & (A_4\eta^4 + A_2\eta^2 + A_0)\,\Phi_0^3(\eta) + (B_3\eta^3 + B_1\eta)\,\Phi_0^2(\eta)\,\Phi_1(\eta) \\ & + (C_2\eta^2 + C_0)\,\Phi_0(\eta)\,\Phi_1^2(\eta) + (D_3\eta^3 + D_1\eta)\,\Phi_1^3(\eta) \\ & + (E_4\eta^4 + E_2\eta^2 + E_0)\,\Phi_0(\sqrt{3}\,\eta) + F_0\Phi_0(\sqrt{2}\,\eta)\,\Phi_1(\eta) \\ & + (G_4\eta^4 + G_2\eta^2 + G_1\eta + G_0)\,\Phi_0^2(\eta) \\ & + (H_3\eta^3 + H_2\eta^2 + H_1\eta + H_0)\,\Phi_0(\eta)\,\Phi_1(\eta) \\ & + (I_2\eta^2 + I_1\eta + I_0)\,\Phi_1^2(\eta) \\ & + (K_4\eta^4 + K_2\eta^2 + K_1\eta + K_0)\,\Phi_0(\eta) \\ & + (L_3\eta^3 + L_2\eta^2 + L_1\eta + L_0)\,\Phi_1(\eta).\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Die hier vorliegenden Ausdrücke wurden numerisch ausgewertet[1] und zwar im Hinblick auf Verwendbarkeit zu eventuellen weiteren iterativen Verbesserungen mit möglichst hoher Stellenzahl[2]. Es wurde durchgehend mit 10 Dezimalen gerechnet; nach Abstrich der im Differenzenschema angezeigten Rauhigkeit durch Rundungsfehler sind die nachfolgend angegebenen Werte auf eine halbe Einheit der letzten Dezimalen genau. Dasselbe gilt auch für die durch numerische Integration erhaltenen Funktionen $\zeta_{0,2a}(\eta)$ und $\zeta_{0,2b}(\eta)$.

[1] Die numerischen Rechnungen wurden von Frl. *Herlinde Kompe* ausgeführt.

[2] Als Grundlage diente das Tafelwerk Probability Functions Vol. I, des National Bureau of Standards, Washington D. C.

	$\zeta'_{0,2\,a}(\eta)$	$\zeta_{0,2\,a}(\eta)$	$\zeta'_{0,2\,b}(\eta)$	$\zeta_{0,2\,b}(\eta)$
A_4	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{13}{9}$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{9}$
A_2	-1	$+\frac{7}{3}$	0	$+\frac{1}{3}$
A_0	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{7}{12}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{3}$
B_3	$-\frac{2}{3}$	$+2$	$+\frac{7}{12}$	$-\frac{1}{4}$
B_1	-2	$+\frac{7}{3}$	$-\frac{3}{8}$	$+\frac{5}{24}$
C_2	$-\frac{5}{12}$	$+\frac{11}{12}$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$
C_0	$-\frac{7}{6}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{12}$
D_3	$+\frac{9}{40}$	$-\frac{21}{40}$	$-\frac{9}{160}$	$-\frac{39}{160}$
D_1	$+\frac{133}{240}$	$-\frac{971}{720}$	$-\frac{31}{320}$	$-\frac{2009}{2880}$
E_4	$+\frac{9\sqrt{3}}{5\pi}$	$-\frac{21\sqrt{3}}{5\pi}$	$-\frac{9\sqrt{3}}{20\pi}$	$-\frac{39\sqrt{3}}{20\pi}$
E_2	$+\frac{27\sqrt{3}}{5\pi}$	$-\frac{63\sqrt{3}}{5\pi}$	$-\frac{27\sqrt{3}}{20\pi}$	$-\frac{117\sqrt{3}}{20\pi}$
E_0	$+\frac{27\sqrt{3}}{20\pi}$	$-\frac{63\sqrt{3}}{20\pi}$	$-\frac{27\sqrt{3}}{80\pi}$	$-\frac{117\sqrt{3}}{80\pi}$
F_0	$+\frac{8\sqrt{2}}{15\sqrt{\pi}}$	$+\frac{8\sqrt{2}}{15\sqrt{\pi}}$	$+\frac{8\sqrt{2}}{15\sqrt{\pi}}$	$+\frac{8\sqrt{2}}{15\sqrt{\pi}}$
G_4	$-\frac{5}{6}+\frac{2}{9\pi}$	$+\frac{19}{6}+\frac{22}{9\pi}$	$+\frac{3}{2}+\frac{2}{3\pi}$	$-\frac{1}{6}-\frac{2}{\pi}$
G_2	$-\frac{5}{2}+\frac{2}{3\pi}$	$+\frac{11}{2}+\frac{2}{\pi}$	$+\frac{1}{2}+\frac{2}{3\pi}$	$+\frac{3}{2}-\frac{10}{3\pi}$
G_1	$-\frac{4}{3\sqrt{\pi}}$	$+\frac{4}{3\sqrt{\pi}}$	0	0
G_0	$+\frac{3}{8}-\frac{1}{2\pi}$	$+\frac{11}{8}+\frac{1}{2\pi}$	$+\frac{5}{8}-\frac{1}{6\pi}$	$+\frac{7}{8}-\frac{1}{6\pi}$
H_3	$-\frac{13}{12}+\frac{1}{3\pi}$	$+\frac{35}{12}+\frac{23}{9\pi}$	$+\frac{7}{4}+\frac{7}{9\pi}$	$+\frac{1}{12}-\frac{17}{9\pi}$
H_2	$+\frac{2}{3\sqrt{\pi}}$	$+\frac{2}{3\sqrt{\pi}}$	0	0
H_1	$-\frac{73}{24}+\frac{23}{18\pi}$	$+\frac{95}{24}+\frac{19}{18\pi}$	$-\frac{1}{8}+\frac{5}{6\pi}$	$+\frac{25}{24}-\frac{5}{2\pi}$
H_0	$-\frac{1}{3\sqrt{\pi}}$	$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}$	0	0
I_2	$-\frac{1}{3}+\frac{1}{9\pi}$	$+\frac{2}{3}+\frac{2}{3\pi}$	$+\frac{1}{2}+\frac{2}{9\pi}$	$+\frac{1}{12}-\frac{4}{9\pi}$
I_1	$+\frac{1}{3\sqrt{\pi}}$	$+\frac{1}{\sqrt{3\pi}}$	0	0
I_0	$-\frac{5}{6}+\frac{4}{9\pi}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}+\frac{2}{9\pi}$	$+\frac{1}{12}-\frac{4}{9\pi}$
K_4	$-\frac{1}{2}-\frac{2+27\sqrt{3}}{15\pi}-\frac{64}{135\pi^2}$	$+\frac{31}{18}+\frac{14+189\sqrt{3}}{45\pi}+\frac{64}{15\pi^2}$	$+\frac{7}{6}+\frac{24+9\sqrt{3}}{20\pi}+\frac{32}{45\pi^2}$	$+\frac{1}{18}+\frac{-88+117\sqrt{3}}{60\pi}-\frac{128}{45\pi^2}$
K_2	$-\frac{3}{2}-\frac{2+27\sqrt{3}}{5\pi}-\frac{64}{45\pi^2}$	$+\frac{19}{6}+\frac{-22+63\sqrt{3}}{5\pi}+\frac{64}{5\pi^2}$	$+\frac{1}{2}+\frac{136+81\sqrt{3}}{60\pi}+\frac{32}{15\pi^2}$	$+\frac{7}{6}+\frac{-104+351\sqrt{3}}{60\pi}-\frac{128}{15\pi^2}$
K_1	$-\frac{4}{\sqrt{\pi}}-\frac{16}{9\pi\sqrt{\pi}}$	$+\frac{4}{3\sqrt{\pi}}+\frac{32}{9\pi\sqrt{\pi}}$	0	0
K_0	$+\frac{1}{8}-\frac{46+81\sqrt{3}}{60\pi}-\frac{16}{45\pi^2}$	$+\frac{19}{24}+\frac{-22+63\sqrt{3}}{20\pi}+\frac{16}{5\pi^2}$	$+\frac{3}{8}+\frac{56+81\sqrt{3}}{240\pi}+\frac{8}{15\pi^2}$	$+\frac{13}{24}+\frac{56+351\sqrt{3}}{240\pi}-\frac{32}{15\pi^2}$
L_3	$-\frac{1}{2}-\frac{2+27\sqrt{3}}{30\pi}-\frac{32}{135\pi^2}$	$+\frac{11}{18}+\frac{14+189\sqrt{3}}{90\pi}+\frac{32}{15\pi^2}$	$+\frac{7}{12}+\frac{24+9\sqrt{3}}{40\pi}+\frac{16}{45\pi^2}$	$+\frac{1}{36}+\frac{-88+117\sqrt{3}}{120\pi}-\frac{64}{15\pi^2}$
L_2	$+\frac{2}{3\sqrt{\pi}}$	$+\frac{2}{3\sqrt{\pi}}$	0	0
L_1	$-\frac{19}{12}-\frac{22+81\sqrt{3}}{36\pi}-\frac{16}{27\pi^2}$	$+\frac{43}{36}+\frac{-98+189\sqrt{3}}{36\pi}+\frac{16}{3\pi^2}$	$-\frac{5}{24}+\frac{40+27\sqrt{3}}{48\pi}+\frac{8}{9\pi^2}$	$+\frac{29}{72}+\frac{-8+39\sqrt{3}}{16\pi}-\frac{32}{9\pi^2}$
L_0	$+\frac{-17+8\sqrt{2}}{15\sqrt{\pi}}-\frac{16}{15\pi\sqrt{\pi}}$	$+\frac{3+8\sqrt{2}}{15\sqrt{\pi}}+\frac{8}{5\pi\sqrt{\pi}}$	$+\frac{-2+8\sqrt{2}}{15\sqrt{\pi}}-\frac{8}{45\pi\sqrt{\pi}}$	$+\frac{-2+8\sqrt{2}}{15\sqrt{\pi}}-\frac{8}{45\pi\sqrt{\pi}}$

Tabelle 1. *Die universelle Beiwertfunktion $\zeta_{00}(\eta)$ mit erster und zweiter Ableitung.*

η	$\zeta_{00}(\eta)$	$\zeta'_{00}(\eta)$	$\zeta''_{00}(\eta)$
0	0	0	1,128 379 167 1
0,1	0,005 632 511 4	0,112 462 916 0	1,117 151 606 8
0,2	0,022 418 327 8	0,222 702 589 2	1,084 134 787 1
0,3	0,050 028 899 1	0,328 626 759 5	1,031 260 909 6
0,4	0,087 938 007 9	0,428 392 355 0	0,961 541 298 8
0,5	0,135 451 644 8	0,520 499 877 8	0,878 782 578 9
0,6	0,191 745 786 8	0,603 856 090 8	0,787 243 431 7
0,7	0,255 908 682 4	0,677 801 193 8	0,691 274 860 4
0,8	0,326 991 022 2	0,742 100 964 7	0,594 985 786 3
0,9	0,404 012 094 7	0,796 908 212 4	0,501 968 574 2
1,0	0,486 064 958 1	0,842 700 792 9	0,415 107 497 4
1,1	0,572 275 791 9	0,880 205 069 6	0,336 479 597 8
1,2	0,661 859 363 8	0,910 313 978 2	0,267 344 347 0
1,3	0,754 124 738 3	0,934 007 944 9	0,208 207 986 8
1,4	0,848 480 438 0	0,952 285 119 8	0,158 941 707 7
1,5	0,944 433 280 7	0,966 105 146 5	0,118 930 289 2
1,6	1,041 582 359 1	0,976 348 383 3	0,087 229 058 6
1,7	1,139 609 716 3	0,983 790 458 6	0,062 711 040 5
1,8	1,238 269 181 1	0,989 090 501 6	0,044 191 723 3
1,9	1,337 374 602 1	0,992 790 429 2	0,030 524 740 4
2,0	1,436 788 439 2	0,995 322 265 0	0,020 666 985 4
2,1	1,536 411 361 4	0,997 020 533 3	0,013 715 650 0
2,2	1,636 173 232 1	0,998 137 153 7	0,008 922 155 1
2,3	1,736 025 618 8	0,998 856 823 4	0,005 689 017 2
2,4	1,835 935 807 4	0,999 311 486 1	0,003 555 648 7
2,5	1,935 882 178 6	0,999 593 048 0	0,002 178 284 2
2,6	2,035 850 752 1	0,999 763 965 6	0,001 308 050 0
2,7	2,135 832 680 6	0,999 865 667 3	0,000 769 924 8
2,8	2,235 822 483 5	0,999 924 986 8	0,000 444 207 9
2,9	2,335 816 838 0	0,999 958 902 1	0,000 251 210 9
3,0	2,435 813 771 5	0,999 977 909 5	0,000 139 253 1
3,1	2,535 812 137 1	0,999 988 351 3	0,000 075 663 3
3,2	2,635 811 282 7	0,999 993 974 2	0,000 040 297 6
3,3	2,735 810 844 7	0,999 996 942 3	0,000 021 037 2
3,4	2,835 810 624 2	0,999 998 478 0	0,000 010 764 9
3,5	2,935 810 515 3	0,999 999 256 9	0,000 005 399 4
3,6	3,035 810 462 6	0,999 999 644 1	0,000 002 654 6
3,7	3,135 810 437 5	0,999 999 832 8	0,000 001 279 3
3,8	3.235 810 426 0	0,999 999 923 0	0,000 000 604 3
3,9	3,335 810 420 7	0,999 999 965 2	0,000 000 279 8
4,0	3,435 810 418 4	0,999 999 984 6	0,000 000 127 0
4,1	3,535 810 417 2	0,999 999 993 3	0,000 000 056 5
4,2	3,635 810 416 6	0,999 999 997 1	0,000 000 024 6
4,3	3,735 810 416 6	0,999 999 998 8	0,000 000 010 5
4,4	3,835 810 416 5	0,999 999 999 5	0,000 000 004 4
4,5	3,935 810 416 5	0,999 999 999 8	0,000 000 001 8
4,6	4,035 810 416 5	0,999 999 999 9	0,000 000 000 7
4,7	4,135 810 416 5	1,000 000 000 0	0,000 000 000 3
4,8	4,235 810 416 5	1,000 000 000 0	0,000 000 000 1
4,9	4,335 810 416 5	1,000 000 000 0	0,000 000 000 0

Tabelle 2. *Die universellen Beiwertfunktionen* $\zeta_{01}(\eta)$ *und* $\bar{\zeta}_{01}(\eta)$ *mit Ableitungen.*

η	$\zeta_{01}(\eta)$	$\zeta'_{01}(\eta)$	$\zeta''_{01}(\eta)$	$\bar{\zeta}_{01}(\eta)$	$\bar{\zeta}'_{01}(\eta)$
0	0	0	+1,607 278 16	0	+0,170 581 18
0,1	+0,007 383 53	+0,141 283 66	+1,224 170 49	+0,017 093 83	+0,171 442 93
0,2	+0,027 039 47	+0,246 060 94	+0,877 853 47	+0,034 237 88	+0,170 808 11
0,3	+0,055 507 79	+0,318 208 01	+0,572 106 00	+0,051 066 69	+0,164 560 69
0,4	+0,089 733 23	+0,361 923 47	+0,309 552 01	+0,066 871 36	+0,150 048 47
0,5	+0,127 091 32	+0,381 602 94	+0,091 483 49	+0,080 771 39	+0,126 448 58
0,6	+0,165 401 25	+0,381 699 89	−0,082 245 18	+0,091 890 91	+0,094 763 95
0,7	+0,202 924 41	+0,366 580 11	−0,213 237 11	+0,099 536 55	+0,057 480 84
0,8	+0,238 348 37	+0,340 379 04	−0,304 474 91	+0,103 313 23	+0,017 989 91
0,9	+0,270 757 27	+0,306 871 99	−0,360 140 57	+0,103 182 14	−0,020 086 19
1,0	+0,299 590 17	+0,269 367 16	−0,385 341 34	+0,099 451 85	−0,053 514 82
1,1	+0,324 590 31	+0,230 629 95	−0,385 764 50	+0,092 714 76	−0,079 913 16
1,2	+0,345 748 55	+0,192 843 86	−0,367 295 80	+0,083 747 99	−0,097 986 88
1,3	+0,363 244 79	+0,157 609 73	−0,335 643 63	+0,073 402 30	−0,107 544 87
1,4	+0,377 391 22	+0,125 980 39	−0,296 009 92	+0,062 498 76	−0,109 332 43
1,5	+0,388 580 45	+0,098 524 61	−0,252 840 88	+0,051 748 45	−0,104 752 08
1,6	+0,397 241 23	+0,075 411 01	−0,209 676 71	+0,041 702 58	−0,095 546 20
1,7	+0,403 803 05	+0,056 501 90	−0,169 103 93	+0,032 733 52	−0,083 504 75
1,8	+0,408 670 23	+0,041 447 09	−0,132 799 27	+0,025 042 04	−0,070 239 84
1,9	+0,412 205 11	+0,029 769 72	−0,101 643 42	+0,018 682 78	−0,057 045 48
2,0	+0,414 719 06	+0,020 938 23	−0,075 877 76	+0,013 599 57	−0,044 840 18
2,1	+0,416 469 87	+0,014 421 68	−0,055 277 15	+0,009 663 00	−0,034 176 54
2,2	+0,417 664 07	+0,009 727 99	−0,039 315 99	+0,006 704 58	−0,025 295 40
2,3	+0,418 461 80	+0,006 426 55	−0,027 311 57	+0,004 544 15	−0,018 202 18
2,4	+0,418 983 73	+0,004 158 09	−0,018 535 86	+0,003 009 66	−0,012 746 65
2,5	+0,419 318 19	+0,002 635 02	−0,012 293 67	+0,001 948 04	−0,008 693 82
2,6	+0,419 528 12	+0,001 635 53	−0,007 969 89	+0,001 232 77	−0,005 779 15
2,7	+0,419 657 19	+0,000 994 32	−0,005 051 38	+0,000 762 85	−0,003 746 32
2,8	+0,419 734 91	+0,000 592 10	−0,003 130 62	+0,000 461 69	−0,002 369 46
2,9	+0,419 780 76	+0,000 345 37	−0 001 897 50	+0,000 273 33	−0,001 462 80
3,0	+0,419 807 26	+0,000 197 33	−0,001 124 92	+0,000 158 31	−0,000 881 80
3,1	+0,419 822 25	+0,000 110 44	−0,000 652 39	+0,000 089 73	−0,000 519 21
3,2	+0,419 830 57	+0,000 060 55	−0,000 370 16	+0,000 049 76	−0,000 298 70
3,3	+0,419 835 09	+0,000 032 52	−0,000 205 49	+0,000 027 01	−0,000 167 94
3,4	+0,419 837 49	+0,000 017 11	−0,000 111 63	+0,000 014 35	−0,000 092 29
3,5	+0,419 838 74	+0,000 008 82	−0,000 059 35	+0,000 007 47	−0,000 049 59
3,6	+0,419 839 38	+0,000 004 45	−0,000 030 88	+0,000 003 80	−0,000 026 06
3,7	+0,419 839 70	+0,000 002 20	−0,000 015 73	+0,000 001 89	−0,000 013 39
3,8	+0,419 839 86	+0,000 001 07	−0,000 007 84	+0,000 000 92	−0,000 006 73
3,9	+0,419 839 93	+0,000 000 51	−0,000 003 83	+0,000 000 44	−0,000 003 31
4,0	+0,419 839 97	+0,000 000 24	−0,000 001 83	+0,000 000 21	−0,000 001 59
4,1	+0,419 839 99	+0,000 000 11	−0,000 000 85	+0,000 000 09	−0,000 000 75
4,2	+0,419 839 99	+0,000 000 05	−0,000 000 39	+0,000 000 04	−0,000 000 34
4,3	+0,419 840 00	+0,000 000 02	−0,000 000 18	+0,000 000 02	−0,000 000 16
4,4	+0,419 840 00	+0,000 000 01	−0,000 000 08	+0,000 000 01	−0,000 000 07
4,5		+0,000 000 00	−0,000 000 03	+0,000 000 00	−0,000 000 03
4,6			−0,000 000 01		−0,000 000 01
4,7			−0,000 000 00		−0,000 000 01
4,8					−0,000 000 00

Tabelle 3a. *Die universellen Beiwertfunktionen* $\zeta_{0,2a}(\eta)$ *und* $\zeta_{0,2b}(\eta)$.

η	$\zeta_{0,2a}(\eta)$	$\zeta_{0,2b}(\eta)$	η	$\zeta_{0,2a}(\eta)$	$\zeta_{0,2b}(\eta)$
0	0	0	2,5	—0,243 071 4	—0,043 998 8
0,1	—0,001 245 5	—0,000 338 2	2,6	—0,243 710 0	—0,044 043 1
0,2	—0,005 025 9	—0,001 359 1	2,7	—0,244 132 0	—0,044 070 8
0,3	—0,011 412 0	—0,003 057 5	2,8	—0,244 404 6	—0,044 087 7
0,4	—0,020 416 0	—0,005 390 7	2,9	—0,244 576 7	—0,044 097 8
0,5	—0,031 937 8	—0,008 271 3	3,0	—0,244 683 0	—0,044 103 7
0,6	—0,045 742 2	—0,011 574 2	3,1	—0,244 747 1	—0,044 107 1
0,7	—0,061 461 5	—0,015 150 6	3,2	—0,244 785 0	—0,044 109 0
0,8	—0,078 618 0	—0,018 843 9	3,3	—0,244 806 9	—0,044 110 1
0,9	—0,096 660 0	—0,022 505 3	3,4	—0,244 819 2	—0,044 110 7
1,0	—0,115 005 5	—0,026 005 3	3,5	—0,244 826 0	—0,044 111 0
1,1	—0,133 086 7	—0,029 242 1	3,6	—0,244 829 7	—0,044 111 2
1,2	—0,150 390 9	—0,032 144 9	3,7	—0,244 831 6	—0,044 111 3
1,3	—0,166 492 7	—0,034 674 0	3,8	—0,244 832 6	—0,044 111 3
1,4	—0,181 074 9	—0,036 817 8	3,9	—0,244 833 1	
1,5	—0,193 937 7	—0,038 587 6	4,0	—0,244 833 4	
1,6	—0,204 995 5	—0,040 011 9	4,1	—0,244 833 5	
1,7	—0,214 264 5	—0,041 129 9	4,2	—0,244 833 6	
1,8	—0,221 843 3	—0,041 986 5	4 3	—0,244 833 6	
1,9	—0,227 889 9	—0,042 627 4			
2,0	—0,232 598 5	—0,043 095 8			
2,1	—0,236 178 2	—0,043 430 3			
2,2	—0,238 835 6	—0,043 663 8			
2,3	—0,240 762 4	—0,043 823 1			
2,4	—0,242 127 1	—0,043 929 4			

Außer den in der Tabelle zu findenden Zahlenwerten mögen noch die folgenden Anfangswerte explizit angegeben werden:

$$
\left.
\begin{aligned}
\zeta''_{00}(0) &= +\frac{2}{\sqrt{\pi}} = +\,1{,}128\,379\,167\,1,\\
\zeta''_{01}(0) &= +\frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{8}{3\pi\sqrt{\pi}} = +\,1{,}607\,278\,159\,4,\\
\zeta''_{0,2a}(0) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{11}{6} + \frac{89 - 108\sqrt{3}}{15\,\pi} + \frac{256}{135\,\pi^2}\right) = -\,0{,}248\,091\,672\,5,\\
\zeta''_{0,2b}(0) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{7}{6} + \frac{-11 + 27\sqrt{3}}{15\,\pi} + \frac{128}{45\,\pi^2}\right) = -\,0{,}067\,420\,331\,5,\\
\bar{\zeta}'_{01}(0) &= +\frac{2}{\sqrt{\pi}} - \frac{16}{3\pi\sqrt{\pi}} = +\,0{,}170\;581\;182\;5,\\
\bar{\zeta}'_{0,2a}(0) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{23}{18} + \frac{-451 + 252\sqrt{3}}{15\,\pi} + \frac{256}{15\,\pi^2}\right) = +\,0{,}080\,817\,500\,1,\\
\bar{\zeta}'_{0,2b}(0) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{23}{18} + \frac{-253 + 351\sqrt{3}}{45\,\pi} - \frac{512}{45\,\pi^2}\right) = +\,0{,}045\,230\,389\,6.
\end{aligned}
\right\} \qquad (40)
$$

5. Beispiel: Ruckartige Anfahrt eines Kreiszylinders. Die Ausdrücke (31), (32), (33) sollen nun zur Darstellung der Grenzschichtentstehung am schräg angeströmten Kreiszylinder verwendet werden und zwar, da die Beiwertfunktionen nur für $n = 0$ vorliegen, für den Fall der ruckartigen Anfahrt des Körpers zu gleichförmiger Geschwindigkeit.

Die Potentialströmung längs eines Normalschnitts eines Kreiszylinders ist bekanntlich

$$q(x) = 2\,U_\infty \sin\frac{x}{R}\,, \qquad (41)$$

wo x die von der vorderen Staulinie aus gemessene Wandbogenlänge, U_∞ die Komponente der Anströmgeschwindigkeit parallel zur Normalebene, und R der Zylinderradius ist. Die V^0-Komponente ist natürlich konstant:

$$\bar{q} = V_\infty. \qquad (42)$$

Tabelle 3b. *Die erste Ableitung der Funktionen $\zeta_{0,2\,a}(\eta)$ und $\zeta_{0,2\,b}(\eta)$ sowie die Funktionen $\bar{\zeta}_{0,2\,a}(\eta)$ und $\bar{\zeta}_{0,2\,b}(\eta)$.*

η	$\zeta'_{0,2\,a}(\eta)$	$\zeta'_{0,2\,b}(\eta)$	$\bar{\zeta}_{0,2\,a}(\eta)$	$\bar{\zeta}_{0,2\,b}(\eta)$
0	0	0	0	0
0,1	−0,025 000 1	−0,006 782 2	+0,008 130 8	+0,004 545 8
0,2	−0,050 739 5	−0,013 631 5	+0,016 331 0	+0,009 081 6
0,3	−0,077 011 2	−0,020 267 1	+0,024 160 0	+0,013 287 4
0,4	−0,102 905 7	−0,026 249 6	+0,030 853 6	+0,016 709 7
0,5	−0,127 138 5	−0,031 151 1	+0,035 583 4	+0,018 948 2
0,6	−0,148 333 6	−0,034 656 3	+0,037 685 4	+0,019 781 0
0,7	−0,165 250 6	−0,036 607 7	+0,036 824 7	+0,019 211 5
0,8	−0,176 952 4	−0,037 008 8	+0,033 073 6	+0,017 448 5
0,9	−0,182 910 3	−0,036 001 7	+0,026 897 4	+0,014 840 3
1,0	−0,183 046 3	−0,033 828 5	+0,019 061 7	+0,011 791 3
1,1	−0,177 718 0	−0,030 789 4	+0,010 489 2	+0,008 684 0
1,2	−0,167 653 6	−0,027 201 0	+0,002 102 1	+0,005 823 7
1,3	−0,153 851 5	−0,023 363 1	−0,005 316 2	+0,003 411 0
1,4	−0,137 460 0	−0,019 533 0	−0,011 214 9	+0,001 539 5
1,5	−0,119 655 0	−0,015 912 1	−0,015 315 0	+0,000 213 4
1,6	−0,101 531 0	−0,012 639 6	−0,017 596 8	−0,000 626 5
1,7	−0,084 017 3	−0,009 796 5	−0,018 248 0	−0,001 074 2
1,8	−0,067 826 1	−0,007 412 3	−0,017 592 0	−0,001 234 5
1,9	−0,053 433 6	−0,005 477 3	−0,016 012 2	−0,001 205 6
2,0	−0,041 089 9	−0,003 954 3	−0,013 887 1	−0,001 068 8
2,1	−0,030 850 2	−0,002 789 9	−0,011 545 5	−0,000 884 7
2,2	−0,022 619 1	−0,001 924 1	−0,009 239 2	−0,000 694 0
2,3	−0,016 198 1	−0,001 297 5	−0,007 138 3	−0,000 520 4
2,4	−0,011 331 9	−0,000 855 7	−0,005 336 8	−0,000 375 3
2,5	−0,007 745 6	−0,000 552 0	−0,003 867 8	−0,000 261 2
2,6	−0,005 173 6	−0,000 348 3	−0,002 721 0	−0,000 176 0
2,7	−0,003 377 3	−0,000 215 0	−0,001 860 4	−0,000 115 1
2,8	−0,002 155 0	−0,000 129 9	−0,001 237 3	−0,000 073 1
2,9	−0,001 344 2	−0,000 076 8	−0,000 801 1	−0,000 045 2
3,0	−0,000 819 8	−0,000 044 4	−0,000 505 3	−0,000 027 2
3,1	−0,000 488 8	−0,000 025 2	−0,000 310 7	−0,000 015 9
3,2	−0,000 285 0	−0,000 014 0	−0,000 186 3	−0,000 009 1
3,3	−0,000 162 6	−0,000 007 6	−0,000 108 9	−0,000 005 1
3,4	−0,000 090 7	−0,000 004 0	−0,000 062 2	−0,000 002 8
3,5	−0,000 049 5	−0,000 002 1	−0,000 034 7	−0,000 001 5
3,6	−0,000 026 4	−0,000 001 1	−0,000 018 9	−0,000 000 7
3,7	−0,000 013 8	−0,000 000 5	−0,000 010 0	−0,000 000 4
3,8	−0,000 007 0	−0,000 000 3	−0,000 005 2	−0,000 000 2
3,9	−0,000 003 5	−0,000 000 1	−0,000 002 7	−0,000 000 1
4,0	−0,000 001 7	−0,000 000 0	−0,000 001 3	−0,000 000 0
4,1	−0,000 000 8		−0,000 000 6	
4,2	−0,000 000 4		−0,000 000 4	
4,3	−0,000 000 2		−0,000 000 2	
4,4	−0,000 000 1		−0,000 000 1	
4,5	−0,000 000 0		−0,000 000 0	

Es ist zweckmäßig, noch die *Reynolds*sche Zahl $Re = U_\infty R/\nu$ sowie eine dimensionslose Zeit $\tau = U_\infty t/R$ einzuführen. τ mißt den vom Zylinder zurückgelegten Weg in Einheiten seines Halbmessers.

Bis zum quadratischen Glied angeschrieben lauten damit die Ausdrücke (31) bis (33)

$$u\left(\frac{x}{R}, \eta, \tau\right) = 2\,U_\infty \sin\frac{x}{R}\left\{\zeta'_{00}(\eta) + 2\,\tau\cos\frac{x}{R}\,\zeta'_{01}(\eta) + 4\,\tau^2\left[\cos^2\frac{x}{R}\,\zeta'_{0,2\,a}(\eta) - \sin^2\frac{x}{R}\,\zeta'_{0,2\,b}(\eta)\right] + \cdots\right\}, \tag{43}$$

$$v\left(\frac{x}{R}, \eta, \tau\right) = V_\infty\left\{\zeta'_{00}(\eta) + 2\,\tau\cos\frac{x}{R}\,\bar{\zeta}_{01}(\eta) + 4\,\tau^2\left[\cos^2\frac{x}{R}\,\bar{\zeta}_{0,2\,a}(\eta) - \sin^2\frac{x}{R}\,\bar{\zeta}_{0,2\,b}(\eta)\right] + \cdots\right\}, \tag{44}$$

$$w\left(\frac{x}{R},\ \eta,\ \tau\right) = -\frac{4\,U_\infty\sqrt{\tau}}{\sqrt{Re}}\left\{\cos\frac{x}{R}\,\zeta_{00}(\eta) + 2\,\tau\left(\cos^2\frac{x}{R} - \sin^2\frac{x}{R}\right)\zeta_{01}(\eta)\right.$$
$$+ 4\,\tau^2\left[\cos\frac{x}{R}\left(\cos^2\frac{x}{R} - \sin^2\frac{x}{R}\right)\zeta_{0,2a}(\eta)\right.$$
$$\left.\left. - 3\cos\frac{x}{R}\cdot\sin\frac{x}{R}\,\zeta_{0,2b}(\eta)\right] + \cdots\right\}. \qquad (45)$$

Zwecks Vertafelung hat man sich nun auf einen bestimmten Anströmwinkel $\operatorname{tg}\alpha = V_\infty/U_\infty$ sowie eine bestimmte *Reynolds*sche Zahl festzulegen. Es wurde $\alpha = 45°$, d.h. $V_\infty = U_\infty\ (=1)$ gewählt. Im Hinblick auf die bei der experimentellen Druckmessung von *Hiemenz*[1] aufgetretene *Reynolds*sche Zahl $Re = 9360$ wurde hier die runde Zahl $Re = 10000$ zu Grunde gelegt.

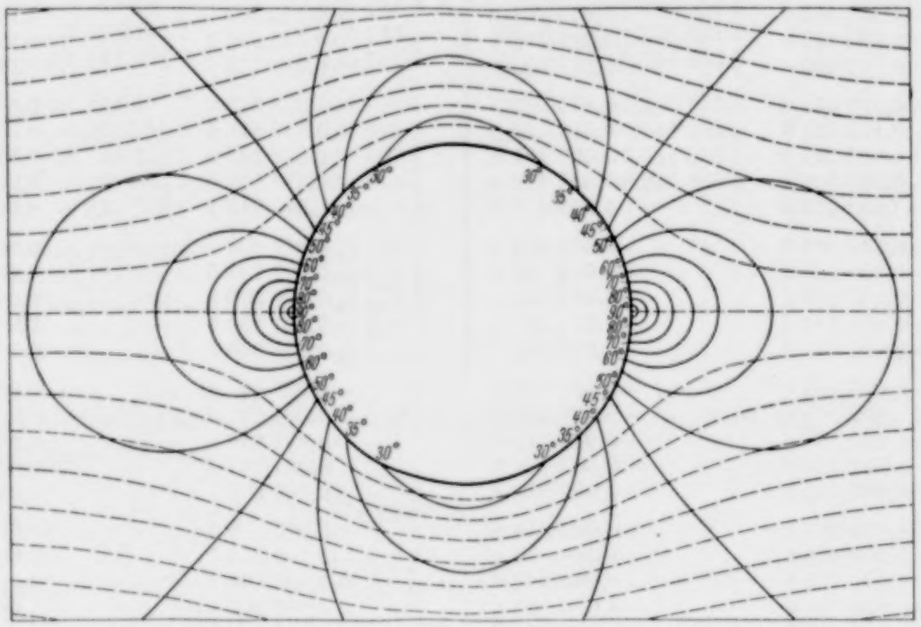

Abb. 1. Die Linien konstanter Steigung in der Potentialströmung um einen unter $\alpha = 45°$ angeströmten Kreiszylinder. (Stromlinien gestrichelt.)

Die Wiedergabe der Strömungsverhältnisse durch ein anschauliches Bild bereitet wegen des Auftretens aller vier Koordinaten x, y, z, t beträchtliche Schwierigkeiten. Die Zeit wird in naheliegender Weise so berücksichtigt, daß man für aufeinanderfolgende Zeitpunkte verschiedene Bilder zeichnet.

Die Grenzschichtdicke muß notwendigerweise in der Zeichnung passend überhöht werden. Dies hat zur Folge, daß für die Zeichnung von Stromlinien auch die radiale Geschwindigkeitskomponente in diesem Maße zu überhöhen ist, was der vorangegangenen Verkleinerung mit dem Faktor $Re^{-1/2}$ gerade entgegenwirkt. Man würde in diesem Fall praktisch eine Strömung mit ziemlich kleinem Re zeichnen, jedoch als ob hierfür die Grenzschichttheorie gültig sei. Die dann am Rand der Grenzschicht durchaus merkliche w-Komponente kann nicht stetig — und damit nicht kontinuitätsgerecht — in die Potentialströmung übergehen, die ja dort $W^0 = 0$ verlangt.

Diese prinzipielle Schwierigkeit, die für das Verständnis der Senkrecht-Anströmung eine Rolle spielt, wird hier umgangen, weil es sich in dieser Arbeit ja nur um die Darstellung des Effekts einer zusätzlichen Querkomponente v handelt. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß man bei senkrechter Projektion der Stromlinien auf Normalschnitte des Zylinders wieder das alte Stromlinienbild der Senkrecht-Anströmung erhält, kann nämlich die Stromliniendarstellung überhaupt unterbleiben. Wir beschränken uns daher auf die Zeichnung eines Feldes von Linien gleicher Steigung (Isoklinen), welche die Stromlinien nunmehr gegenüber Normalschnitten des

[1] K. *Hiemenz*, Dinglers Polytechn. Journal 326 (1911), S. 321.

Zylinders besitzen. Dies bedeutet, daß in der $\left(\frac{x}{R}, \eta\right)$-Ebene die Kurven

$$\frac{v}{\sqrt{u^2 + w^2}} = \text{konst.} = \operatorname{tg}\beta \tag{46}$$

zu zeichnen sind. Der Scharparameter β wird geeignet äquidistant variiert.

Am Außenrand der Grenzschicht müßten asymptotisch auch die Steigungsverhältnisse der Potentialströmung an der Kontur erreicht werden. Dies ist wegen der nicht verschwindenden w-Komponente, die nun aber nicht überhöht zu werden braucht, nicht genau erfüllt. Die stärksten Abweichungen finden in der Gegend der Symmetrieebene der Strömung statt, weil dort u identisch verschwindet und daher w sogar überwiegt. Lediglich aus Verständnisgründen wird daher das entsprechende „Steigungsfeld" für die gesamte Potentialströmung und den unter $\alpha = 45°$ angeströmten Kreiszylinder wiedergegeben. Hierbei können die Stromlinien mit eingezeichnet werden, da keine Überhöhungen notwendig sind[1] (Abb. 1).

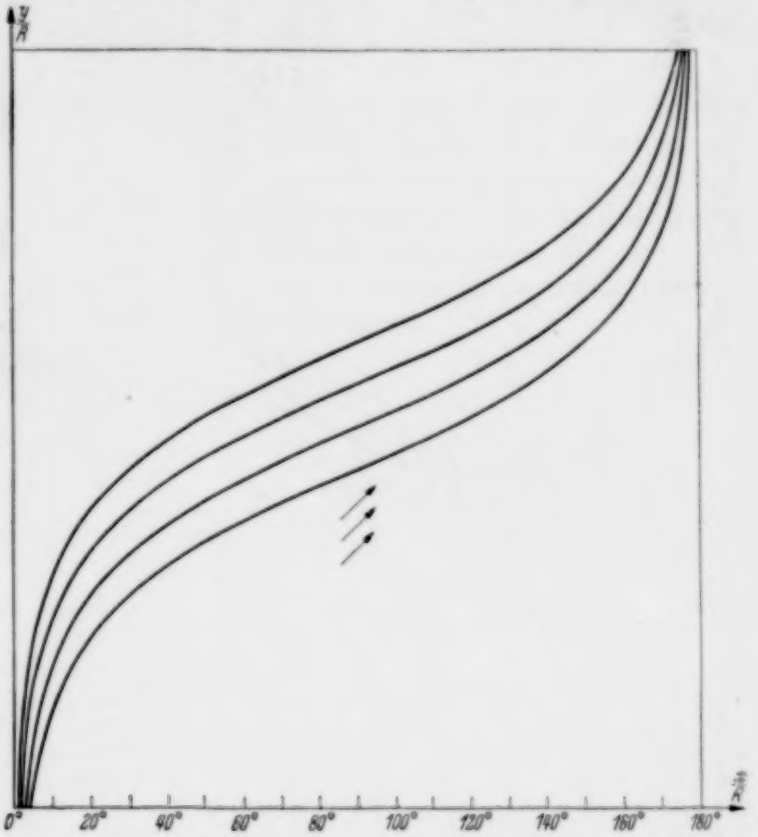

Abb. 2. Einige „Wandstromlinien" der Potentialströmung in Seitensicht. Die Pfeile auf der Mantellinie $x/R = 90°$ geben die Steigung $\alpha = 45°$ der ungestörten Anströmung an.

Zur numerischen Auswertung von (43) bis (45) wurde ein Gitter mit den Maschenweiten

$$\frac{x}{R} = 0°\,(10°)\,180°, \quad \eta = 0\,(0{,}2)\,4{,}0,$$
$$\tau = 0\,(0{,}1)\,0{,}5$$

zu Grunde gelegt[2].

Daraus wurde das Steigungsfeld (46) berechnet und durch die Gitterpunkte hindurch mittels graphischer Interpolation in x/R- und in η-Richtung die Isoklinen mit Parameterwerten

$$\beta = 0°\,(5°)\,90°$$

gelegt[3].

Die Grenzschichtdicke (aber nicht etwa w) erscheint in den Abbildungen gegenüber den Zylinderdimensionen etwa 20-fach überhöht. Entsprechend dem Grenzschicht-Dickenwachstum

[1] Die Linien gleicher Stromliniensteigung $V_\infty/\sqrt{U^2 + W^2} = \text{konst.} = \operatorname{tg}\beta$ sind hier zugleich auch Linien gleichen Geschwindigkeitsbetrags $\sqrt{U^2 + W^2}$ und damit nach *Bernoulli* gleichen Drucks; nur der Scharparameter hat jeweils verschiedene Bedeutung. Ihre Gleichung in kartesischen Koordinaten (x die Anströmachse, Mittelpunkt des Zylinder-Normalschnitts im Ursprung) lautet für den Zylinder vom Halbmesser 1

$$1 + \frac{1 + 2\,(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \text{konst.} = \operatorname{ctg}^2\beta\,.$$

Es handelt sich also um algebraische Kurven vierter Ordnung, während die (gestrichelten) Stromlinien selbst mit der Gleichung

$$y\left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right) = \text{konst.} = b$$

Kurven dritter Ordnung sind. Insbesondere zerfällt die Kurve mit $b = 1$ (d. h. $\beta = 45°$) in eine gleichseitige Hyperbel und den unendlich fernen Kreis. Die Steigungsverhältnisse der durch keinen Körper gestörten Anströmung, also der Wert α, finden sich an der Zylinderkontur auf Mantellinien, die von der (vorderen bzw. hinteren) Staulinie um den Zentriwinkel 30° entfernt sind.

[2] Bei einer vorläufigen Auswertung von (43) bis (45) nur bis zu Gliedern mit τ^1 einschließlich (vgl. Fußnote 4 von S. 217) zeigte sich der bei inkompressiblen Medien vermutlich energetisch unzulässige Effekt einer Geschwindigkeitsüberhöhung der u- und w-Profile auf der Zylindervorderseite. Darunter wollen wir verstehen, daß innerhalb der Grenzschicht höhere Geschwindigkeiten auftreten als am Außenrand asymptotisch erreicht werden sollten. Die Überhöhung wird im Rahmen der vorliegenden Genauigkeit durch das folgende Reihenglied mit τ^2 wieder abgebaut. Damit ist die zu Beginn des Abschnitts 3 behauptete Notwendigkeit genauerer Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten begründet.

[3] Die numerischen Rechnungen wurden von Frl. *Herlinde Kompe* ausgeführt.

Abb. 3—7. Die Linien konstanter Steigung in der Grenzschichtströmung um einen unter 45° angeströmten Kreiszylinder.

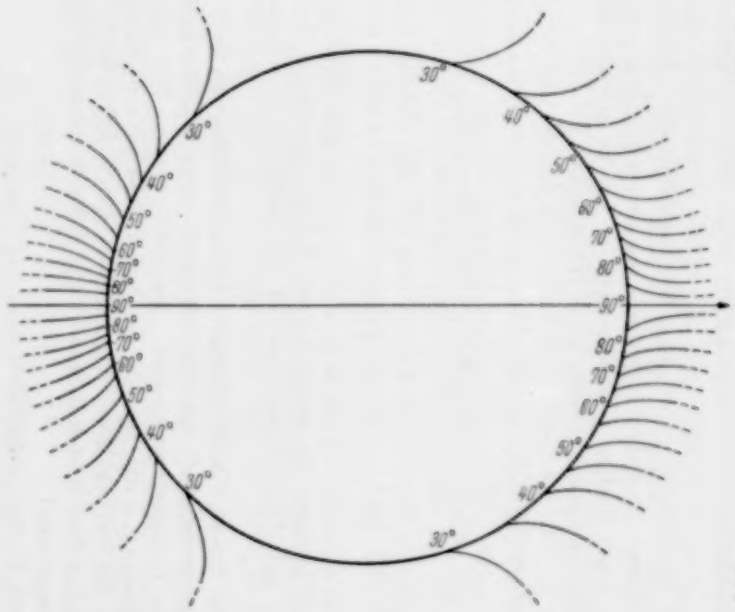

Abb. 3.
$\tau = 0{,}1$.

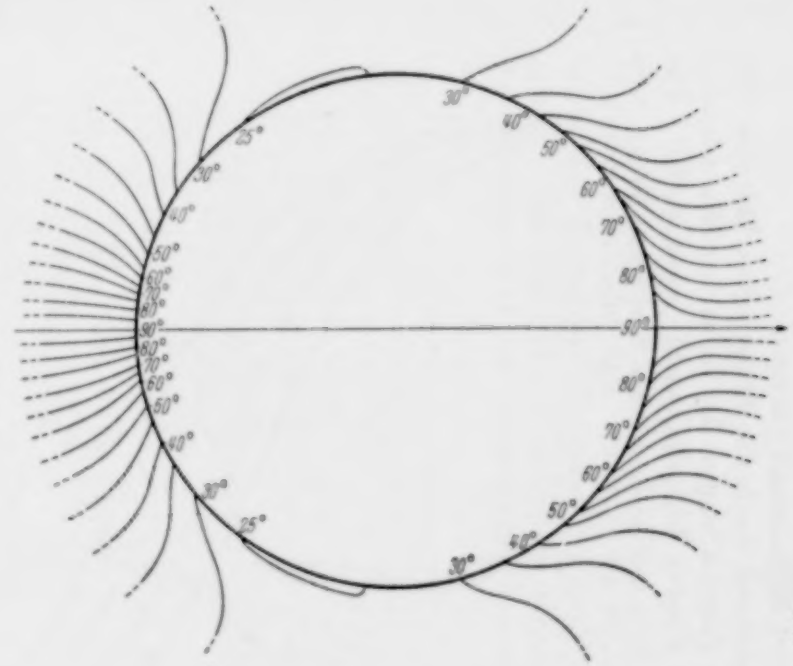

Abb. 4.
$\tau = 0{,}2$.

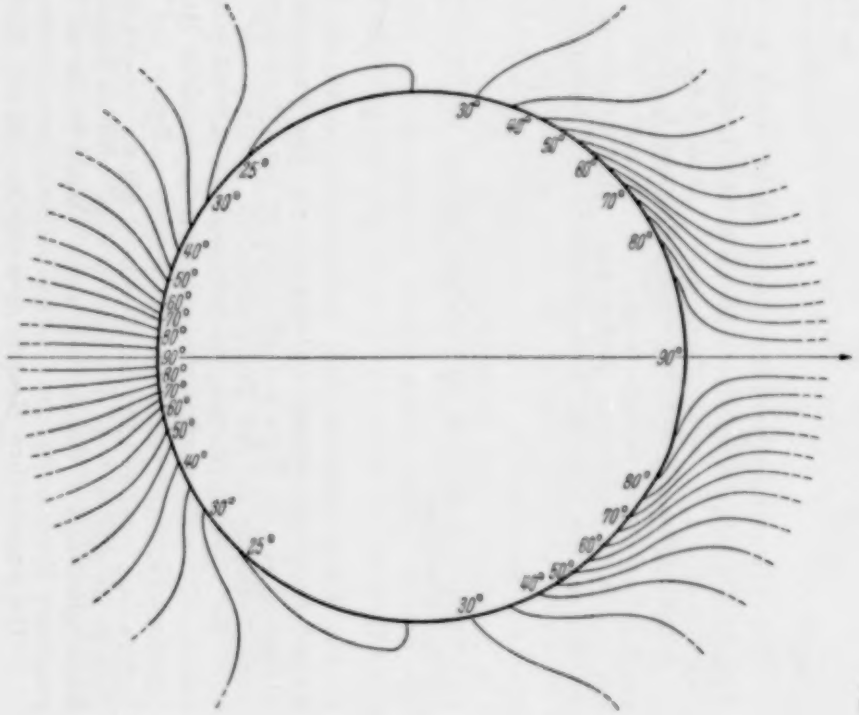

Abb. 5.
$\tau = 0{,}3$.

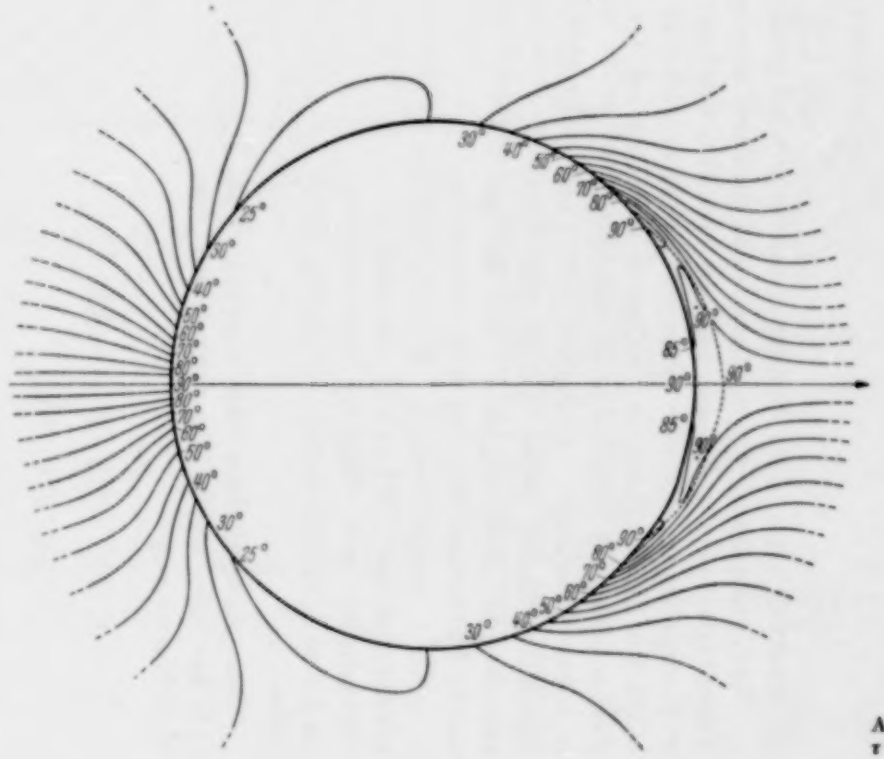

Abb. 6.
$\tau = 0{,}4$.

$\delta \backsimeq \sqrt{\tau}$ wird der Umfang der Bilder für wachsende Zeiten größer. Für $\tau = 0$ existiert noch keine Grenzschicht. Man kann lediglich Wandstromlinien zeichnen, auf denen die Geschwindigkeit 0 herrscht und deren Steigung

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \lim_{\eta \to 0} \frac{v}{u} = \frac{v_\eta}{u_\eta}\bigg|_{\eta=0} \tag{47}$$

ist. Da sie die potentialtheoretischen Steigungsverhältnisse am Außenrand der Grenzschicht für alle τ angibt, sei ihr Verlauf in Seitensicht auf dem abgewickelten Halbzylinder $\left(\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}\right)\text{-Ebene}\right)$ wiedergegeben (Abb. 2). Ihre Gleichung ist

$$Y\left(\frac{x}{R}\right) = \int \frac{V^0}{U^0}\, d\left(\frac{x}{R}\right) = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2R} + \text{konst.} \tag{48}$$

Wie schon oben (Abschnitt 2) bemerkt, werden die Ablösungsorte und -zeiten der Grenzschicht durch die Querkomponente v nicht verändert. Es möge daher genügen, einige Zahlwerte hierzu anzugeben, die aus der verbesserten Berechnung der $\zeta_{0,\lambda}$ resultieren.

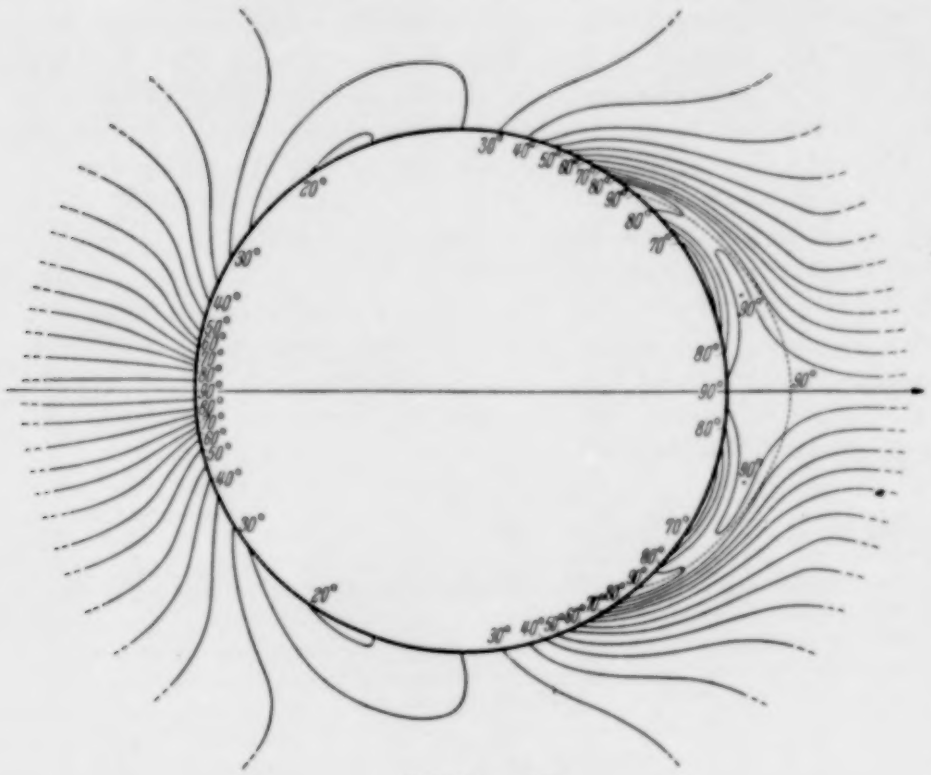

Abb. 7. $\tau = 0{,}5$.

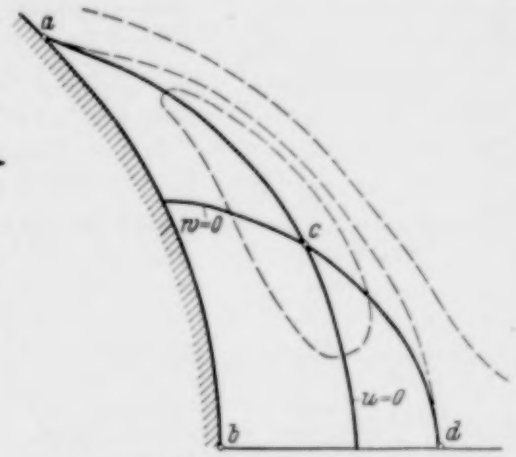

Abb. 8. Die Strömungsverhältnisse im Wirbelgebiet (schematisch). Die Stromlinien sind gestrichelt. a) Ablösepunkt, b) hinterer Staupunkt, c) Wirbelpunkt, d) weiterer Punkt mit verschwindenden Geschwindigkeitskomponenten u und w.

In der hier vorliegenden zweiten Näherung ergibt sich der Ablösungsbeginn in der hinteren Staulinie zur Zeit $\tau = 0{,}319\,507$. Die Ablösestellen liegen für $\tau = 0{,}4$ bei $\frac{x}{R} = 143{,}95°$, für $\tau = 0{,}5$ bei $\frac{x}{R} = 131{,}21°$[1].

Interessant mag auch noch der (natürliche, zeichnerisch nicht überhöhte) Ablösewinkel γ, d. h. der Winkel zwischen Ablösestromlinie und Kontur, sein:

$$\operatorname{tg} \gamma = \lim_{\eta \to 0} = \frac{w}{u} \frac{1}{R} = \frac{w_{\eta\eta}}{u_{\eta\eta}} \frac{1}{R}\bigg|_{\eta=0}; \tag{49}$$

er hängt im Gegensatz zu Ablösezeit und Ablösestelle wesentlich von der *Reynolds*schen Zahl und vom Zylinderradius ab. Für $Re = 10\,000$ und $R = 10$ cm ergeben sich in den betrachteten Bereichen zeitlich langsam anwachsende Winkel von unter 10′, also durchweg sehr flache Ablösung.

Die Darstellung der zeitlichen Entwicklung der Steigungsverhältnisse in der Grenzschicht um den schräg angeströmten Kreiszylinder (Abb. 3 bis 7) läßt nun folgendes erkennen.

Die Linien gleichen Stromlinienanstiegs, die bei Reibungsfreiheit innerhalb der dünnen wandnahen Schicht noch praktisch radial verlaufen würden, erscheinen schon bei $\tau = 0{,}1$ an der Kontur gegen die vordere Staulinie zu abgebogen; es entstehen Steigungsprofile. Der äußere fast radial verlaufende Teil dieser Profile wird, als nicht mehr Grenzschichtcharakter tragend, gestrichelt wiedergegeben.

[1] Für $\tau \to \infty$ wird bekanntlich asymptotisch eine Ablösestelle zwischen 109° und 110° erreicht.

Für $\tau = 0{,}2$ verstärkt sich das Abbiegen der Isoklinen. Vor dem Druckminimum beim Zentriwinkel 90° bildet sich eine wandnahe Zone mit Untersteigung aus, d.h. ein Gebiet, in dem geringere Steigung herrscht als es die Potentialströmungsverhältnisse zulassen würden. Die Isoklinen hinter dem Druckminimum zeigen bereits einen Wendepunkt, der auf die kommende Ablösung hinweist.

Abb. 5 zeigt die Verhältnisse bei $\tau = 0{,}3$ kurz vor der Ablösung. Das Untersteigungsgebiet hat sich ausgedehnt. Immer mehr Profile haben Wendepunkte. Die Zone starker Steigung hat sich von der hinteren Staulinie aus an der Wand weit nach vorne verbreitert.

Bei $\tau = 0{,}4$ hat die Ablösung schon stattgefunden. Der (in der Ausdrucksweise einer $\left(\frac{x}{R}, \eta\right)$-Projektion) hintere Staupunkt hat sich in sechs einzelne Punkte mit $u = w = 0$ aufgespalten. Dies sind Orte mit 90°-Steigung, also einer Strömung parallel zu den Erzeugenden. Man liest aus Abb. 8, die die charakteristischen Linien im Wirbelgebiet schematisch wiedergibt, die Lage dieser Punkte ab.

Bei $\tau = 0{,}5$ hat sich das Gebiet starker Steigung um die hintere Symmetrieachse bereits sehr weit ausgedehnt. Während zwischen Ablösepunkt a und Wirbelpunkt c noch eine Brücke ziemlich hoher Steigung bleibt, bildet sich im wandnahen Wirbelgebiet eine Zone geringerer Steigung aus, die sich rasch eintieft. Räumlich gesehen sind die Stromlinien dort Schraubenlinien wechselnder Steigung. Im betrachteten Zeitabschnitt bis $\tau = 0{,}5$ ist die Steigung im gesamten Feld stets positiv. Für viel größere τ ließe sich, beginnend auf der hinteren Symmetrieachse, eine Abwärtsströmung errechnen; doch ist dann wegen der Ausbreitung der Wirbel die Grenzschichtvoraussetzung einer ungestörten Potentialströmung längst nicht mehr gültig.

Schließlich möge darauf hingewiesen werden, daß in den Abbildungen auf der Zylindervorderseite die Steigungsprofile nach außen zu (gestrichelt eingezeichnet) wieder etwas absinken. Dies beruht jedoch nur auf der endlichen Größe von w, ist also ein unerwünschter Effekt der Grenzschichtvernachlässigungen, die, wie mehrfach betont, den kontinuitätsgerechten Anschluß der Grenzschicht an die Außenströmung nicht gewährleisten.

(Eingegangen am 10. September 1954.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Hermann Wundt*, Bensberg bei Köln, Planstraße 4 (bei der Ferd.-Stucker-Straße).

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete.

Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden.

LXXIV. Band: **Darstellungen von Gruppen mit Berücksichtigung der Bedürfnisse der modernen Physik.**

Von Dr. **Hermann Boerner**, Professor der Mathematik an der Justus-Liebig-Hochschule, Gießen.

Mit 15 Abbildungen. XI, 287 Seiten Gr.-8°. 1955. DM 33,—; Ganzleinen DM 36,60

Inhaltsübersicht: **I. Matrizen.** Vektoren. Lineare Abbildungen. Matrizen. Begriff einer Algebra. Quadratische und hermitesche Formen, orthogonale und unitäre Matrizen. Eigenwerte und Transformation auf Diagonalgestalt. Zwei weitere Verknüpfungen für Matrizen; das KRONECKER-Produkt. Äquivalenz und Reduzibilität von Matrixsystemen. Das Lemma von SCHUR. Vertauschbarkeit von Matrixsystemen. Beispiele irreduzibler Systeme. Eine Anwendung des SCHURschen Lemmas. — **Gruppen.** Elementare Gruppentheorie. Die symmetrische und die alternierende Gruppe. Kontinuierliche Gruppen. Die Matrix-Exponentialfunktion. Der Infinitesimalring einer linearen Gruppe. Integration in LIEschen Gruppen. — **Allgemeine Darstellungstheorie.** Begriff der Darstellung. Die vollständige Reduzibilität der Darstellungen endlicher Gruppen. Eindeutigkeit der Zerlegung. Der Gruppenring und die reguläre Darstellung. Struktur des Gruppenrings. Vorbereitende Sätze. Die Struktur des Gruppenrings und das System der Klassen irreduzibler Darstellungen. Zur Darstellungstheorie der halbeinfachen Algebren. Normale Darstellungen. Die Charaktere. Charaktere und Gruppenring. Darstellungen und Charaktere eines direkten Produkts. Zusammenhang der Charaktere mit denen einer Untergruppe. Weitere Formeln für die Charaktere, ihre Berechnung auf algebraischem Wege. Die infinitesimalen Transformationen der Darstellungen kontinuierlicher Gruppen. Die abjugierte Darstellung. Die Charaktere der kontinuierlichen Gruppen. Gruppe mit Normalteiler vom Index 2. — **Die Darstellungen der symmetrischen Gruppen.** Die Tableaux. Hilfesätze über die Tableaux. Die irreduziblen Darstellungen. Die Standard-Tableaux. Volle Reduktion des Gruppenrings. Berechnung der Matrizen einer irreduziblen Darstellung. Beweis der Sätze 4.2 und 4.3. — **Die Darstellungen der vollen linearen, unimodularen und unitären Gruppen.** Vorbemerkungen. Das KRONECKER-Quadrat und die symmetrischen und schiefsymmetrischen Tensoren zweiter Stufe. Der Raum der Tensoren ν-ter Stufe und die Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ vom Polynomgrad ν. Die Symmetrieklassen im Tensorraum. Die Tableaux und die ganzrationalen Darstellungen der vollen linearen Gruppe. Der Verzweigungssatz. Ganzrationale Darstellungen der reellen linearen, unimodularen und unitären Gruppen. Rationale und semirationale Darstellungen. Die unzerfällbaren Darstellungen der additiven Gruppe der reellen Zahlen. Die stetigen Darstellungen der vollen und reellen linearen, der unimodularen und unitären Gruppen. — **Charaktere der linearen und der Permutationsgruppen. Die alternierende Gruppe.** Die Charakteristiken und die Darstellungsgrade der ganzrationalen Darstellungen der vollen linearen Gruppe. Zusammenhang zwischen den Charakteren der symmetrischen Gruppe und den Charakteristiken der vollen linearen Gruppe. Zur Berechnung der Charaktere der symmetrischen Gruppe. Übersicht über die Darstellungen der alternierenden Gruppe. Noch eine Formel zur Berechnung der Charaktere von $\mathfrak{S}_\nu$. Analyse von KRONECKER-Produkten bei der symmetrischen und bei der vollen linearen Gruppe. Die Charaktere der alternierenden Gruppe. — **Charaktere und eindeutige Darstellungen der Drehgruppe.** Zusammenhangsverhältnisse der Drehgruppe. Das Toroid $\mathfrak{T}_p$ Das STIEFELsche Diagramm. Die Gruppe ψ. Die Fundamentalbereiche der Gruppe ψ. Die Eigenwerte der Darstellungen. Die Eigenwerte der adjungierten Darstellung. Das Integral über eine Klassenfunktion. Invariante und alternierende Polynome und Elementarsummen. Das System der einfachen Charaktere. Der Darstellungsgrad. Der Verzweigungssatz. Anwendung auf die niederen Dimensionszahlen. Die Fundamentaldarstellungen. Die volle orthogonale Gruppe. — **Spindarstellungen, Infinitesimalring, gewöhnliche Drehgruppe.** Der Infinitesimalring der Drehgruppe. CLIFFORDS Algebra und ihr Zusammenhang mit den infinitesimalen Drehungen. Darstellungstheorie der CLIFFORDschen Algebra. Die Spindarstellungen des Infinitesimalrings der Drehgruppe. Die Spindarstellungen der Drehgruppe. Die gewöhnliche Drehgruppe $\mathfrak{d}_3$. Die Formel von CLEBSCH-GORDAN. Struktur des Infinitesimalrings und Gewichte der Darstellungen. Weitere KRONECKER-Produkte. Algebra von KEMMER und DE BROGLIE. — **Die LORENTZ-Gruppe.** Die vier Stücke der LORENTZ-Gruppe. Die Fundamentaldarstellungen der LORENTZ-Gruppe $\mathfrak{L}_{n,t}$. Die gewöhnliche eigentliche LORENTZ-Gruppe $\mathfrak{l}_{4,1}$ und ihr Zusammenhang mit der unimodularen Gruppe $\mathfrak{g}_2$. Die Darstellungen der vollen LORENTZ-Gruppe $\mathfrak{L}_{4,1}$. — Literaturverzeichnis. — Namen- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete.

Unter Mitwirkung der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik" herausgegeben von **L.V. Ahlfors, R. Baer, R. Courant, J. L. Doob, S. Eilenberg, H. Rademacher, F. K. Schmidt, B. Segre, E. Sperner.** Neue Folge.

Die Ergebnisse der Mathematik fanden in der Zeit ihres Erscheinens von 1932 bis 1942 viel Beachtung und weite Verbreitung. Sie beginnen jetzt wieder in neuer Folge in einzeln berechneten Heften und werden schnell fortgesetzt werden.

Die Bezieher der „Zentralblatt für Mathematik" erhalten die „Ergebnisse der Mathematik" zu einem gegenüber dem Ladenpreis um 10% ermäßigten Vorzugspreis.

Erstes Heft: **Transfinite Zahlen.** Von **Heinz Bachmann.** VII, 204 Seiten Gr.-8°. 1955. DM 29,80

Inhaltsübersicht: I. Einleitung. Allgemeine mengentheoretische Vorbemerkungen. — II. Ordnungszahlen und transfinite Funktionen. — III. Arithmetik der Ordnungszahlen. — IV. Arithmetik der Mächtigkeiten und Kardinalzahlen ohne Auswahlaxiom. — V. Die Konsequenzen des Auswahlaxioms und der Alephypothese in der Kardinalzahlenarithmetik. — VI. Probleme des Kontinuums und der zweiten Zahlklasse. — VII. Unerreichbare Zahlen. — Literaturverzeichnis. — Sachverzeichnis.

Zweites Heft: **Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico.** Di **Carlo Miranda.** 222 Seiten Gr.-8°. 1955. DM 28,80

Indice: Prefazione. — I. Problemi al contorno per le equazioni lineari. — II. Funzioni rappresentate da integrali. — III. Traduzione in equazioni integrali dei problemi al contorno. — IV. Soluzioni generalizzate dei problemi al contorno. — V. Maggiorazione a priori delle soluzioni del problema di Dirichlet. — VI. Equazioni non lineari. — VII. Altre ricerche sulle equazioni ellittiche. Equazioni di ordine superiore. Sistemi di equazioni. — Bibliografia. — Indice per autori.

Dem Verfasser erschien es daher von Interesse, den gegenwärtigen Stand der Forschung in einer Monographie zusammenzufassen und dabei auch eine gedrängte Übersicht über die verschiedenen, beim Studium der partiellen Differentialgleichungen angewandten Verfahren zu geben. Er beschäftigt sich hauptsächlich mit den grundlegenden Teilen der Theorie, die im Gegensatz zu den Untersuchungen über gemischte Probleme, über Gleichungen höherer Ordnung und Systeme von Differentialgleichungen schon einen gewissen Abschluß erreicht haben. Die folgenden Verfahren werden besonders herausgestellt:

1. Die BIRAUDsche Methode für die Zurückführung der Randwertprobleme auf Integralgleichungen zweiter Art.
2. Das Studium der Randwertprobleme mit Hilfe linearer Funktionalanalysis, das in Arbeiten von CACCIOPPOLI, PICONE und WEYL entwickelt worden ist.
3. Die Untersuchungen von BERNSTEIN, HOPF, SCHAUDER, LERAY und CACCIOPPOLI, die auf direkte Majorisierung der Lösung linearer und nichtlinearer Gleichungen hinauslaufen.

In zwei vorbereitenden Kapiteln werden verschiedene klassische Grundbegriffe sowie Eigenschaften verallgemeinerter Potentiale zusammengestellt. Schließlich werden im 7. Kapitel einige spezielle Fragen bei einer Gleichung zweiter Ordnung, bei Gleichungen höherer Ordnung, bei Gleichungssystemen sowie die Abhängigkeit von einem Parameter untersucht. Das Heft schließt mit einer ausgedehnten Bibliographie, die mehr als 600 nach 1924 erschienene Arbeiten umfaßt.

Drittes Heft: **Analytische Fortsetzung.** Von **L. Bieberbach,** Berlin. Mit 2 Textabbildungen. IV, 168 Seiten Gr.-8°. 1955. DM 24,80

Inhaltsübersicht: **Grundlegende Sätze.** Die LAPLACE-BORELsche Transformation. Die Koeffizienten als ganze Funktionen ihrer Nummer. Die Funktionen $\sum_0^\infty A(n)\, z^n : A(z)$ ganz. Der HADAMARDsche Multiplikationssatz. Sätze von HURWITZ und CRAMER. Die EULERsche Reihentransformation. Ein Test für singuläre Stellen eines Funktionselementes. Unmittelbare Folgerungen aus dem Test. — **FABRYsche Sätze.** Der allgemeine Satz. Der FABRYsche Lückensatz. Der FABRYsche Quotientensatz. — **Weiteres über Lücken und Koeffizientendichten.** Der Lückensatz von OSTROWSKI. Der Lückensatz von POLYA. Weiteres über Koeffizientendichte. Komplementäre Reihen. — **Die Häufigkeit der fortsetzbaren und der nichtfortsetzbaren Reihen.** BOREL, STEINHAUS, BOERNER, POLYA, HAUSDORFF. Banach-Räume. — **Zusätze zum HADAMARDschen Multiplikationssatz.** Ältere Untersuchungen. Die neuere Entwicklung. — **Arithmetische Eigenschaften der Koeffizienten.** Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten. Potenzreihen mit ganzen rationalen Koeffizienten. Ganze ganzwertige Funktionen. — **Die Koeffizienten als Funktionen der Nummer.** HADAMARD. Ein allgemeiner Satz vod LEAU. Der spezielle Satz von LEAU. — Literaturverzeichnis. — Namenverzeichnis. — Sachverzeichnis.

Als letzter Band der alten Reihe erschien am 30. 11. 1942:
V. Band, 5. Heft: Nagy, Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegen 2 Prospekte des Springer-Verlages, Berlin / Göttingen / Heidelberg und 1 Prospekt des Springer-Verlages, Wien, bei.

Springer-Verlag, Berlin / Göttingen / Heidelberg. Printed in Germany. 57 275 4022 0,8 K. B./Z. 040.